ол

ISSN 2075-9827

К М П

Карпатські математичні публікації

CARPATHIAN MATHEMATICAL PUBLICATIONS

КАРПАТСКИЕ МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ПУБЛИКАЦИИ

Том 2

№ 2 2010

Карпатські математичні публікації
Науковий журнал

Друкується за рішенням Вченої ради
Прикарпатського національного університету імені Василя Стефаника

Адреса редакції: Факультет математики та інформатики
Прикарпатський національний університет
імені Василя Стефаника
вул. Шевченка, 57
76025, Івано-Франківськ
Тел.: (0342) 59-60-50
e-mail: cmp.if.ua@gmail.com
Адреса в інтернеті: http://www.cmp.pu.if.ua

Карпатські математичні публікації

Науковий журнал
Т.2, №2
2010

Зміст

Carpathian mathematical publications

SCIENTIFIC JOURNAL

V.2, №2

2010

CONTENTS

Карпатские математические публикации

НАУЧНЫЙ ЖУРНАЛ

Т.2, №2

2010

СОДЕРЖАНИЕ

Карпатські математичні публікації. Т.2, №2

Carpathian Mathematical Publications. V.2, №2

УДК 517.52

Балан В.А.

ПОБУДОВА РАДІАЛЬНО ОБМЕЖЕНИХ АНТИПРОКСИМІНАЛЬНИХ МНОЖИН В ПРОСТОРІ L_1

Балан В.А. *Побудова радіально обмежених антипроксимінальних множин в просторі* L_1 // Карпатські математичні публікації. — 2010. — Т.2, №2. — С. 4–9.

Показано, що в просторі L_1 поляра слабко* збіжної до нуля послідовності містить радіально обмежену абсолютно опуклу антипроксимінальну множину.

Вступ

Відстанню від елемента x в нормованому просторі X до непорожньої множини $M \subseteq X$ називається число $d(x,M) = \|x - M\| = \inf\{\|x-y\| : y \in M\}$. Елемент $y \in M$ називається *найближчою точкою до* x, якщо $\|x-y\| = d(x,M)$, а множина всіх найближчих елементів до точки x в множині M позначається через $P_M(x)$.

Множина M називається *антипроксимінальною (AP-множиною)*, якщо $P_M(x) = \varnothing$ для довільного $x \in X \setminus M$.

Нехай X^* — спряжений простір до X. Кажуть, що функціонал $f \in X^*$ *досягає максимуму на множині* $M \subseteq X$, якщо існує елемент $x \in M$ такий, що $f(x) = \sup f(M)$. Позначимо $\Sigma(M)$ множину всіх функціоналів, які досягають максимуму на множині M, тобто

$$\Sigma(M) = \{f \in X^* : \exists x \in M \mid f(x) = \sup f(M)\}.$$

У 1972 році М.Едельштейн і А.Томпсон в [5] показали, що антипроксимінальність обмеженої замкненої опуклої підмножини M банахового простору X рівносильна тому, що жоден ненульовий опорний функціонал множини M не досягає норми на замкненій одиничній кулі B, тобто

$$\Sigma(A) \cap \Sigma(B) = \{0\}.$$

В роботах [1-6] вивчалися простори, які містять деяку обмежену замкнену непорожню антипроксимінальну множину. Зокрема, було встановлено, що такими є простори: c_0, c, $c(X)$ (при певних умовах на простір X), L_∞. У зв'язку з цими дослідженнями

2000 *Mathematics Subject Classification:* 46E30, 46B28.

Ключові слова і фрази: простір L_1, антипроксимінальна множина, радіальна обмеженість.

М. Попов поставив питання: чи містить простір сумовних функцій L_1 деяку обмежену опуклу замкнену антипроксимінальну множину?

Множина M в банаховому просторі X над полем $\mathbb{K}$, $0 \in M$, називається *радіально обмеженою*, якщо для кожного ненульового елемента $x \in X$ множина $\{\alpha \in \mathbb{K} : \alpha x \in M\}$ – обмежена в $\mathbb{K}$.

Зауважимо, що в [2] побудовано приклад опуклої замкненої радіально обмеженої антипроксимінальної множини в просторі $L_1[-1,1]$.

У даній статті ми узагальнимо підхід з [2] і покажемо, що поляра довільної w^*-збіжної до нуля послідовності функціоналів з L_1^* містить замкнений радіально обмежений абсолютно опуклий антипроксимінальний окіл нуля в L_1.

1 Допоміжні твердження

Спочатку відмітимо, що

$$\Sigma(B_{L_1}) = \{f \in L_\infty : \mu(\{t \in [0,1] : |f(t)| = \|f\|\}) > 0\},$$

де B_{L_1} — замкнена одинична куля в L_1.

Тут і далі, враховуючи опис спряженого L_1^*, неперервні функціонали на просторі L_1 ми будемо ототожнювати з елементами простору L_∞. А саме, якщо $y \in L_\infty$, то $y(x) = \int\limits_{[0,1]} y(t)x(t)d\mu$ для всіх $x \in L_1$.

Для довільної множини A у лінійному просторі X через $\mathrm{sp}(A)$ ми позначатимемо лінійну оболонку множини A.

Нам будуть потрібні наступні твердження.

Твердження 1.1. *Нехай $(y_n)_{n=1}^\infty$ — послідовність простих функцій $y_n \in L_\infty$, $(a_n)_{n=1}^\infty$ — довільна послідовність чисел $a_n \in \mathbb{R}$, $a_n \neq 0$, $(z_n)_{n=1}^\infty$ — послідовність функцій $z_n \in L_\infty$, $\tilde{y}_n = y_n + a_n z_n$ для кожного $n \in \mathbb{N}$, причому послідовність $(z_n)_{n=1}^\infty$ задовольняє наступну умову:*

(i) якщо існує така множина $A \subseteq [0,1]$ з $\mu(A) > 0$, що функція $\sum\limits_{k=1}^n b_k z_k$ — стала на A, то $b_k = 0$ для всіх $1 \le k \le n$.

Тоді $sp\{\tilde{y}_n : n \in \mathbb{N}\ \cap \Sigma(B_{L_1})\} = \{0\}$.

Доведення. Нехай існує функція $h : [0,1] \to \mathbb{R}$, $h \in sp\{\tilde{y}_n : n \in \mathbb{N}\} \cap \Sigma(B_{L_1})$. Оскільки $h \in \Sigma(B_{L_1})$, то множина $A = \{t \in [0,1] : |h(t)| = \|h\|\}$ така, що $\mu(A) > 0$. Вважатимемо, що $\mu(A^+) > 0$, де $A^+ = \{t \in [0,1] : h(t) = \|h\|\}$.

З іншого боку, оскільки $h \in sp\{\tilde{y}_n : n \in \mathbb{N}\}$, то $h = \sum\limits_{k=1}^n (\lambda_k y_k + \lambda_k a_k z_k)$.

Тому маємо

$$\sum_{k=1}^n \lambda_k y_k(t) + \sum_{k=1}^n \lambda_k a_k z_k(t) = \|h\|$$

для всіх $t \in A^+$. Тепер $\sum\limits_{k=1}^n \lambda_k a_k z_k(t) = \|h\| - \sum\limits_{k=1}^n \lambda_k y_k(t) = g(t)$. Оскільки функція $g(t)$ є простою, то існують таке $c \in \mathbb{R}$ і множина $B \subseteq A^+$ з $\mu(B) > 0$, що $g(t) = c$ для довільного $t \in B$. Тому $\sum\limits_{k=1}^{n} \lambda_k a_k z_k = c$ на множині B, звідки, згідно з умовою (i), маємо $\lambda_k a_k = 0$ для кожного $1 \le k \le n$. Врахувавши, що всі $a_k \ne 0$, одержимо, що $\lambda_k = 0$ для всіх $1 \le k \le n$. Тому $h = 0$. $\square$

Зауважимо, що послідовність $(z_n)_{n=1}^{\infty}$ многочленів різних додатних степенів задовольняє умову (i) твердження 1.1, адже многочлен додатного степеня не може бути сталим на нескінченній множині.

Твердження 1.2. *Нехай $X = L_1$, $(\varepsilon_k)_{k=1}^{\infty}$ — збіжна до нуля послідовність чисел $\varepsilon_k > 0$, $(x_{nk} : n \in \mathbb{N}, k > n)$ — сім'я елементів $x_{nk} \in X$ таких, що $\|x_{nk}\| \le \varepsilon_k$ для всіх $n \in \mathbb{N}$ та $k > n$ і $\varphi : \mathbb{N} \to \{(n,k) : n \in \mathbb{N}, k > n\}$ — бієкція. Тоді послідовність $z_m = x_{\varphi(m)}$ збігається до нуля в X.*

Доведення. Зафіксуємо $\varepsilon > 0$. Оскільки $\lim\limits_{k\to\infty} \varepsilon_k = 0$, то існує $k_0 \in \mathbb{N}$, таке що $\varepsilon_k < \varepsilon$ для всіх $k \ge k_0$. Зрозуміло, що множина $A = \{(n,k) : n \in \mathbb{N}, n < k < k_0\}$ — скінченна. Покладемо $m_0 = \sup \varphi^{-1}(A)$.

Нехай $m > m_0$. Тоді $(n,k) = \varphi(m) \notin A$, тобто $k \ge k_0$. Тому $\|z_m\| = \|x_{nk}\| \le \varepsilon_k < \varepsilon$, а, отже, $\lim\limits_{m\to\infty} \|z_m\| = 0$. $\square$

Для множини A в топологічному просторі X через $\overline{A}$ ми позначатимемо замикання множини A. Через $\mathrm{cc}(A)$ — абсолютно опуклу оболонку множини A у векторному просторі X.

Твердження 1.3. *Нехай $(y_n)_{n=1}^{\infty}$ — послідовність елементів $y_n \in L_\infty$, таких що $y_n \xrightarrow{w^*} 0$. Тоді існує послідовність $(z_n)_{n=1}^{\infty}$, $z_n \in L_\infty$, така що $z_n \xrightarrow{w^*} 0$, $\mathrm{sp}\{z_n : n \in \mathbb{N}\} \cap \Sigma(B_{L_1}) = \{0\}$ і $\{y_n : n \in \mathbb{N}\} \subseteq \overline{\mathrm{cc}\{z_n : n \in \mathbb{N}\}}^{w^*}$.*

Доведення. Нехай $(\varepsilon_k)_{k=1}^{\infty}$ — послідовність чисел $\varepsilon_k = \frac{1}{4^k}$ і $(m_{nk} : n \in \mathbb{N}, k \ge n)$ — сім'я різних натуральних чисел. Побудуємо сім'ю $(\tilde{x}_{nk} : n \in \mathbb{N}, k \ge n)$ простих функцій $\tilde{x}_{nk} \in L_\infty$, таку що сім'я $(x_{nk} : n \in \mathbb{N}, k \ge n)$ елементів $x_{nk} = \tilde{x}_{nk} + \varepsilon_k \alpha_{nk}$, де $\alpha_{nk}(t) = t^{m_{nk}}$ при $t \in [0,1]$, задовольняє умови:

(i) $\|y_n - \sum\limits_{i=n}^{k} x_{ni}\| \le 2\varepsilon_k$ для всіх $n \in \mathbb{N}$ і $k \ge n$,

(ii) $\|x_{nk}\| \le 2\varepsilon_k + \varepsilon_{k+1}$ при $k > n$.

Зауважимо, що достатньо для кожного $n \in \mathbb{N}$ побудувати послідовність $(\tilde{x}_{nk})_{k=n}^{\infty}$. Зафіксуємо $n \in \mathbb{N}$. Міркуватимемо індукцією відносно $k \ge n$. Виберемо просту функцію $\tilde{x}_{nn} \in L_\infty$, таку що $\|y_n - \tilde{x}_{nn}\| \le \varepsilon_n$. Тоді

$$\|y_n - x_{nn}\| \le \|y_n - \tilde{x}_{nn}\| + \|\tilde{x}_{nn} - x_{nn}\| \le \varepsilon_n + \|\varepsilon_n \alpha_{nn}\| \le 2\varepsilon_n,$$

тобто виконується умова (i) при $k = n$.

Припустимо, що функції $\tilde{x}_{nn}, ..., \tilde{x}_{nk}$ вже побудовані. Побудуємо функцію $\tilde{x}_{nk+1}$. Згідно з умовою (i), маємо $\|\tilde{y}_{nk}\| \le 2\varepsilon_k$, де $\tilde{y}_{nk} = y_n - \sum\limits_{i=n}^{k} x_{ni}$.

Виберемо просту функцію $\tilde{x}_{nk+1} \in L_\infty$, таку що $\|\tilde{x}_{nk+1}\| \le 2\varepsilon_k$ і $\|\tilde{y}_{nk} - \tilde{x}_{nk+1}\| \le \varepsilon_{k+1}$. Тоді матимемо

$$\|y_n - \sum_{i=n}^{k+1} x_{ni}\| \le \|\tilde{y}_{nk} - \tilde{x}_{nk+1}\| + \|\varepsilon_{k+1}\alpha_{nk+1}\| \le 2\varepsilon_k + \varepsilon_{k+1},$$

тобто виконується умова (ii).

Покладемо $u_{nn} = 2x_{nn}$ і $u_{nk} = 2^k x_{nk}$ при $k > n$. Тепер візьмемо бієкцію $\varphi : \mathbb{N} \to \{(n,k) : n \in \mathbb{N}, k \ge n\}$ і покладемо $z_m = u_{\varphi(m)}$.

Множину натуральних чисел $\mathbb{N}$ розіб'ємо на дві підмножини наступним чином:

$$M_1 = \{\varphi^{-1}(n,n) : n \in \mathbb{N}\}, \quad M_2 = \mathbb{N} \setminus M_1.$$

Оскільки $y_n \xrightarrow{w^*} 0$ і $\|y_n - x_{nn}\| \le 2\varepsilon_n$, то $x_{nn} \xrightarrow{w^*} 0$, тому і $u_{nn} \xrightarrow{w^*} 0$, а, отже, послідовність $(z_m)_{m\in M_1}$ — w^*-збіжна до нуля. Тепер, оскільки $\|x_{nk}\| \le \frac{1}{4^k} = \varepsilon_k$, то $\|u_{nk}\| \le \frac{1}{2^k}$ для всіх $n \in \mathbb{N}$ та всіх $k > n$. Отже, згідно з твердженням 2.2, послідовність $(z_m)_{m\in M_2}$ збігається до нуля за нормою. Тому $z_m \xrightarrow{w^*} 0$ при $m \to \infty$.

Тепер, оскільки $\|y_n - \sum\limits_{i=n}^{k} x_{ni}\| \le 2\varepsilon_k$, то $y_n = \sum\limits_{k\ge n} x_{nk}$. Врахувавши, що $\sum\limits_{i=n}^{k} x_{ni} = \frac{1}{2}u_{nn} + \sum\limits_{i=n+1}^{k} \frac{1}{2^i} u_{ni} \subseteq \mathrm{cc}\{u_{ni} : i \ge n\} = \mathrm{cc}\{z_n : n \in \mathbb{N}\}$ для всіх $n \in \mathbb{N}$ і $k > n$, отримаємо, що $y_n \in \overline{\mathrm{cc}\{z_n : n \in \mathbb{N}\}}^{w^*}$ для кожного $n \in \mathbb{N}$. $\square$

Зауважимо, що оскільки функції $\tilde{x}_{nk}$ — прості і натуральні числа m_{nk} різні, то послідовність функцій x_{nk} задовольняє умову (i) твердження 1.1. Тому цю ж умову задовольняє послідовність $(z_n)_{n=1}^{\infty}$. Отже, $\mathrm{sp}\{z_n : n \in \mathbb{N}\} \cap \Sigma(B_{L_1}) = \{0\}$.

Твердження 1.4. *Нехай X — нормований простір, $(y_n)_{n=1}^{\infty}$, $(z_n)_{n=1}^{\infty}$ — послідовності лінійних неперервних функціоналів $y_n, z_n \in X^*$, такі що $\{y_n : n \in \mathbb{N}\} \subseteq \overline{\mathrm{sp}\{z_n : n \in \mathbb{N}\}}^{w^*}$ і $\sup\limits_{n\in\mathbb{N}} |y_n(x)| > 0$ для всіх $x \in X$. Тоді $\sup\limits_{n\in\mathbb{N}} |z_n(x)| > 0$ для всіх $x \in X$.*

Доведення. Нехай $\sup\limits_{n\in\mathbb{N}} |z_n(x)| = 0$ для деякого $x \in X$, тобто $z_n(x) = 0$ для всіх $n \in \mathbb{N}$. Зауважимо, що множина $L = \{y \in X^* : y(x) = 0\}$ є w^*-замкненою в X^*. Тому $\{y_n : n \in \mathbb{N}\} \subseteq \overline{\mathrm{sp}\{z_n : n \in \mathbb{N}\}}^{w^*} \subseteq L$. Отже, $y_n(x) = 0$ для всіх $n \in \mathbb{N}$, що суперечить умові. $\square$

2 Основний результат

Теорема 1. *Нехай X — нормований простір, B — одинична куля в X, $(y_n)_{n=1}^{\infty}$ — w^*-збіжна до нуля послідовність функціоналів $y_n \in X^*$, така що $\mathrm{sp}\{y_n : n \in \mathbb{N}\} \cap \Sigma(B) = \{0\}$. Тоді множина $M = \{y_n : n \in \mathbb{N}\}^o$ є AP-множиною.*

Доведення. Покажемо, що $\Sigma(M) \subseteq \mathrm{sp}\{y_n : n \in \mathbb{N}\}$.

Нехай $y_0 \ne 0$, $y_0 \in \Sigma(M)$. Без обмеження загальності можемо вважати, що $\sup\limits_{x\in M} y_0(x) = |\sup\limits_{x\in M} y_0(x)| = 1$. Оскільки $y_0 \in \Sigma(M)$, то існує елемент $x_0 \in M$, такий що $y_0(x_0) = 1$.

Оскільки $|y_0(x)| \le 1$ для всіх $x \in M$, то $y_0 \in M^o = \{y_n : n \in \mathbb{N}\}^{oo}$. Згідно з теоремою про біполяру, множина $\{y_n : n \in \mathbb{N}\}^{oo}$ є w^*-замкненою абсолютно опуклою оболонкою множини $\{y_n : n \in \mathbb{N}\}$, тобто $y_0 \in \overline{\mathrm{cc}\{y_n : n \in \mathbb{N}\}}^{w^*} = B$.

Покладемо $N_1 = \{n \in \mathbb{N} : |y_n(x_0)| < \frac{1}{2}\}$ і $N_2 = \{n \in \mathbb{N} : |y_n(x_0)| \ge \frac{1}{2}\}$. Оскільки $y_n(x_0) \to 0$, то множина N_2 — скінченна. Покладемо $A_1 = \overline{\mathrm{cc}\{y_n : n \in N_1\}}^{w^*}$ і $A_2 = \overline{\mathrm{cc}\{y_n : n \in N_2\}}^{w^*} = \mathrm{cc}\{y_n : n \in N_2\}$.

Позначимо $A = \{\lambda a_1 + \mu a_2 : a_1 \in A_1, a_2 \in A_2, |\lambda| + |\mu| \le 1\}$ і покажемо, що $A = \mathrm{cc}(A_1 \cup A_2) = B$.

Зауважимо, що $A \subseteq \mathrm{cc}(A_1 \cup A_2) \subseteq \overline{\mathrm{cc}(A_1 \cup A_2)}^{w^*} = B$. Крім того, оскільки множини A_1 і A_2 — абсолютно опуклі, то і множина A є абсолютно опуклою. Тому $\mathrm{cc}(A_1 \cup A_2) = A$. Залишилось показати, що множина A є w^*-замкненою.

Розглянемо неперервне відображення $\varphi : (X^*, w^*) \times (X^*, w^*) \times \mathbb{R}^2 \to (X^*, w^*)$, яке діє за правилом $\varphi(x, y, (\lambda, \mu)) = \lambda x + \mu y$. Згідно з теоремою Алаоглу-Бурбакі, множини A_1 і A_2 є компактними в (X^*, w^*), а множина $S = \{(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2 : |\lambda| + |\mu| \le 1\}$ – компактна в $\mathbb{R}^2$. Тому множина $A = \varphi(A_1 \times A_2 \times S)$ є компактною, зокрема w^*-замкненою в X^*.

Таким чином, $y_0 \in A$. Тоді $y_0 = \lambda g_1 + \mu g_2$, де $g_1 \in A_1$, $g_2 \in A_2$, $|\lambda| + |\mu| \le 1$. Оскільки $|g(x_0)| \le \frac{1}{2}$ для всіх $g \in A_1$ і $|g(x_0)| \le 1$ для всіх $g \in A_2$, то $|g_1(x_0)| \le \frac{1}{2}$ і $|g_2(x_0)| \le 1$. Покажемо, що $\lambda = 0$. Маємо $1 = |y_0(x_0)| = |\lambda g_1(x_0) + \mu g_2(x_0)| \le |\lambda||g_1(x_0)| + |\mu||g_2(x_0)| \le |\lambda| \cdot \frac{1}{2} + |\mu| \cdot 1 \le 1 - \frac{|\lambda|}{2}$. Отже, $\lambda = 0$ і $y_0 \in A_2 = \mathrm{cc}\{y_n : n \in N_2\} \subseteq \mathrm{sp}\{y_n : n \in \mathbb{N}\}$.

Тепер, оскільки $\mathrm{sp}\{y_n : n \in \mathbb{N}\} \cap \Sigma(B) = \{0\}$, то $\Sigma(M) \cap \Sigma(B) = \{0\}$, а, отже, M — AP-множина. □

Теорема 2. *Нехай $(y_n)_{n=1}^{\infty}$ — w^*-збіжна до нуля послідовність функцій $y_n \in L_\infty$. Тоді існує сепарабельна множина $B \in L_\infty$, така що множина $\{y_n : n \in \mathbb{N}\} \subseteq B$ і множина $M = B^o$ є AP-множиною в L_1. Зокрема, якщо $\sup\limits_{n \in \mathbb{N}} |y_n(x)| > 0$ для всіх $x \in X$, то множина M є радіально обмеженою.*

Доведення. Згідно з твердженням 1.3 існує послідовність $(z_n)_{n=1}^{\infty}$ точок $z_n \in L_\infty$, така що $z_n \xrightarrow{w^*} 0$, $\mathrm{sp}\{z_n : n \in \mathbb{N}\} \cap \Sigma(B_{L_1}) = \{0\}$ і $\{y_n : n \in \mathbb{N}\} \subseteq \overline{\mathrm{cc}\{z_n : n \in \mathbb{N}\}}^{w^*}$. Покладемо $B = \overline{\mathrm{cc}\{z_n : n \in \mathbb{N}\}}^{w^*}$. Зауважимо, що $M = B^o = \{z_n : n \in \mathbb{N}\}^{ooo} = \{z_n : n \in \mathbb{N}\}^o$. Тоді, згідно з теоремою 1 множина M є AP-множиною в L_1.

Покажемо, що M є радіально обмеженою. Спочатку зауважимо, що радіальна обмеженість множини $\mathrm{cc}\{z_n : n \in \mathbb{N}\}^o$ рівносильна тому, що $\sup\limits_{n \in \mathbb{N}} |z_n(x)| > 0$ для всіх $x \in X$. Тепер, оскільки $\sup\limits_{n \in \mathbb{N}} |y_n(x)| > 0$ для всіх $x \in X$, то згідно з твердженням 1.4 $\sup\limits_{n \in \mathbb{N}} |z_n(x)| > 0$ для всіх $x \in X$. □

Наступне твердження показує, що, використовуючи описану вище конструкцію, одержати обмежену AP-множину M в просторі L_1 не можна, адже простір L_1 не можна ізоморфно вкласти в простір c_0.

Твердження 2.1. *Нехай X – банахів простір, $(y_n)_{n=1}^{\infty}$ — w^*-збіжна до нуля послідовність функцій $y_n \in X^*$ і $M = \{y_n : n \in \mathbb{N}\}^o$. Тоді, якщо M — обмежена, то X ізоморфно вкладається в c_0.*

Доведення. Означимо оператор $T : X \to c_0$ наступним чином

$$X \ni x \xrightarrow{T} (y_1(x), y_2(x), \ldots) = Tx.$$

Оскільки $y_n \xrightarrow{w^*} 0$, то $y_n(x) \underset{n \to \infty}{\longrightarrow} 0$ для всіх $x \in X$, а, отже, $Tx \in c_0$ для всіх $x \in X$.

Зрозуміло, що оператор T — лінійний. Покажемо, що оператор T — неперервний. Зауважимо, що згідно з принципом рівномірної обмеженості послідовність $(y_n)_{n=1}^{\infty}$ — обмежена за нормою. Без обмеження загальності вважатимемо, що $\|y_n\| \le 1$ для кожного $n \in \mathbb{N}$. Зафіксуємо $x \in X$. Тоді $\|Tx\|_{c_0} = \|(y_1(x), y_2(x), \ldots)\|_{c_0} = \sup\limits_n |y_n(x)| \le \sup\limits_n \|y_n\| \cdot \|x\| \le \|x\|$. Отже, $\|T\| \le 1$ і оператор T — неперервний.

Нехай $C > 0$ таке, що $\|x\| \le C$ для кожного $x \in M = \{z \in X : \sup\limits_n |y_n(z)| \le 1\} = \{z \in X : \|Tz\|_{c_0} \le 1\}$. Тому $\|Tz\|_{c_0} \ge \frac{1}{C}\|z\|$ для кожного $z \in X$, тобто T – обмежений знизу. Отже, T – ізоморфне вкладення. □

Література

1. Фонф В.П. *Об антипроксиминальных множествах в пространствах непрерывных функций на бикомпактах* // Мат. заметки. – 1983. – Т.33, №4. – С. 549–558.
2. Balaganskii V.S. *Antiproximinal sets in the space of continuous functions*, Math. Notes, **60**, 5 (1996), 485–494.
3. Cobzaş S. *Antiproximinal sets in the Banach space $c(X)$*, Comment. Math. Univ. Carolinae, **38**, 2 (1997), 247–253.
4. Cobzaş S. *Antiproximinal sets in the spaces c_0 and c*, Math. Notes, **17** (1975), 449–457.
5. Edelstein M., Thompson A.C. *Some results on nearest points and support properties of convex sets in c_0*, Pacific J. Math., **40** (1972), 553–560.
6. Klee V. *Remarks on nearest points in normed linear spaces*, Proc. Colloquium on Convexity, Copenhagen, (1965), 168–176.

Чернівецький національний університет ім. Ю. Федьковича,
Чернівці, Україна

Надійшло 20.09.2010

Balan V.A. *Construction of radially bounded antiproximinal sets in L_1*, Carpathian Mathematical Publications, **2**, 2 (2010), 4–9.

It is shown that in L_1 space the polar of the weakly* convergent sequence contains radially bounded completely convex set.

Балан В.А. *Построение радиально ограниченных антипроксиминальных множеств в пространстве L_1* // Карпатские математические публикации. — 2010. — Т.2, №2. — С. 4–9.

Показано, что в пространстве L_1 поляра слабо* сходящейся к нулю последовательности содержит радиально ограниченное абсолютно выпуклое множество.

Карпатські математичні публікації. Т.2, №2

Carpathian Mathematical Publications. V.2, №2

УДК 517.51

Волошин Г.А., Маслюченко В.К., Маслюченко О.В.

ПРО НАБЛИЖЕННЯ НАРІЗНО І СУКУПНО НЕПЕРЕРВНИХ ФУНКЦІЙ

Волошин Г.А., Маслюченко В.К., Маслюченко О.В. *Про наближення нарізно і сукупно неперервних функцій* // Карпатські математичні публікації. — 2010. — Т.2, №2. — С. 10–20.

Досліджується проблема: які з всюди щільних підпросторів L банахового простору $C(Y)$ неперервних на компакті Y функцій і топологічних просторів X мають ту властивість, що для кожної нарізно чи сукупно неперервної функції $f : X\times Y \to \mathbb{R}$ існує така послідовність нарізно або сукупно неперервних функцій $f_n : X\times Y \to \mathbb{R}$, що $f_n^x = f_n(x,\cdot) \in L$ для довільних $n\in\mathbb{N}$, $x\in X$, і $f_n^x \rightrightarrows f^x$ на Y для кожного $x\in X$? Зокрема з'ясовано: коли простір $C(Y)$ має базис, то кожна сукупно неперервна функція $f : X\times Y\to\mathbb{R}$ має сукупно неперервні апроксимації f_n такого роду.

1. Вперше наближення нарізно неперервної функції $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ за допомогою сукупно неперервних функцій $f_n:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$, які є кусково лінійними відносно другої змінної, розглянув А. Лебеґ у своїй першій друкованій праці [10], де він встановив, що кожна нарізно неперервна функція $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ належить до першого класу Бера. М. Цуджі [15] зауважив, що конструкцію Лебеґа можна застосувати для доведення теореми Бера про проекцію множини точок розриву нарізно неперервних функцій. У праці [1] за допомогою многочленів Бернштейна було показано, що для кожної нарізно неперервної функції $f:[0,1]^2\to\mathbb{R}$ існує така послідовність сукупно неперервних і поліноміальних відносно другої змінної функцій $f_n:[0,1]^2\to\mathbb{R}$, що $f_n^x(y)=f_n(x,y)\rightrightarrows f(x,y)=f^x(y)$ на [0,1] при $n\to\infty$ для кожного $x\in[0,1]$.

Після цього стало зрозуміло, що кожен метод апроксимації неперервних функцій породжує відповідну задачу про наближення нарізно неперервних функцій, і, таким чином, виникає багато питань, які пов'язують теорію наближень з теорією нарізно неперервних функцій. Результати дослідження цих питань доповідалися на трьох наукових конференціях [12, 3, 2], другому Всеукраїнському математичному конгресі [5], академії, присвяченій Ю. Шаудеру, у Львівському університеті (25 вересня 2009), науковому семінарі з теорії функцій і функціонального аналізу в Чернівецькому університеті (15

2000 *Mathematics Subject Classification:* 54C30, 65D15.

Ключові слова і фрази: нарізно і сукупно неперервні функції, наближення нарізно і сукупно неперервних функцій.

жовтня 2009) і семінарі "Сучасні проблеми теорії ймовірності і математичного аналізу" у Ворохті [7, 4], організованому Прикарпатським університетом.

У цій праці ми обговорюємо проблеми, поставлені в [7], розширюємо їх список і даємо доведення теорем, сформульованих у [7, 2].

2. Для топологічного простору Y символом $C(Y)$ ми позначаємо простір усіх неперервних дійснозначних функцій $g:Y\to\mathbb{R}$, а символом $C_p(Y)$ — цей же простір, наділений топологією поточкової збіжності, що породжується сукупністю переднорм $q_y(g)=|g(y)|$, де y пробігає множину Y [8, с.30].

Нехай X — ще один топологічний простір. Для функції $f:X\times Y\to\mathbb{R}$ і точки $(x,y)\in X\times Y$ покладемо $f^x(y)=f_y(x)=f(x,y)$. Функція f називається *нарізно неперервною*, якщо функції $f^x:Y\to\mathbb{R}$ і $f_y:X\to\mathbb{R}$— неперервні для довільних $x\in X$ і $y\in Y$. Сукупність усіх нарізно неперервних функцій $f:X\times Y\to\mathbb{R}$ ми позначаємо символом $CC(X\times Y)$.

Кожній функції $f:X\times Y\to\mathbb{R}$ поставимо у відповідність відображення $\varphi:X\to\mathbb{R}^Y$, для якого $\varphi(x)=f^x$ для кожного $x\in X$. Про φ кажуть, що це — *асоційоване з f відображення* або *вертикальне розшарування функції f*.

Теорема 1. *Нехай X і Y — топологічні простори і φ — вертикальне розшарування функції $f:X\times Y\to\mathbb{R}$. Тоді наступні умови еквівалентні:*

(i) $f\in CC(X\times Y)$;

(i) $\varphi(X)\subseteq C(Y)$ і відображення $\varphi:X\to C_p(Y)$ — неперервне.

Доведення. (i)⇒(ii). Нехай $f\in CC(X\times Y)$. Тоді для кожного $x\in X$ за означенням $\varphi(x)=f^x\in C(Y)$, отже, $\varphi(X)\subseteq C(Y)$. Покажемо, що відображення $\varphi:X\to C_p(Y)$ — неперервне в кожній точці $x\in X$. Зафіксуємо якусь точку x_0 з X і розглянемо базисний окіл V точки $g_0=\varphi(x_0)$ у просторі $C_p(Y)$, що складається з усіх точок $g\in C_p(Y)$, для яких

$$\max_{k=1,\dots,n}|g(y_k)-g_0(y_k)|<\varepsilon,$$

де $y_1,\dots,y_n\in Y$ і $\varepsilon>0$. Оскільки всі функції f_{y_k} при $k=1,\dots,n$ неперервні в точці x_0, то існує такий окіл U точки x_0 в X, що для довільного $x\in U$ і кожного $k=1,\dots,n$ виконується нерівність $|f_{y_k}(x)-f_{y_k}(x_0)|<\varepsilon$. Нехай $x\in U$ і $g=\varphi(x)$. Тоді для кожного $k=1,\dots,n$

$$|g(y_k)-g_0(y_k)|=|f^x(y_k)-f^{x_0}(y_k)|=|f_{y_k}(x)-f_{y_k}(x_0)|<\varepsilon,$$

отже, $g\in V$. Таким чином, $\varphi(U)\subseteq V$, що і дає нам неперервність відображення φ у точці x_0.

(ii)⇒(i). З умови $\varphi(X)\subseteq C(Y)$ випливає, що $f^x\in C(Y)$ для кожного $x\in X$. Очевидно, що для кожного $y\in Y$ функціонали $\delta_y:C_p(Y)\to\mathbb{R}$, $\delta_y(g)=g(y)$ — неперервні. Тому з неперервності відображення $\varphi:X\to C_p(Y)$ негайно випливає неперервність всіх функцій $f_y:X\to\mathbb{R}$, адже $f_y=\delta_y\circ\varphi$, бо $(\delta_y\circ\varphi)(x)=\delta_y(\varphi(x))=f^x(y)=f_y(x)$. □

3. Для компактного простору Y символом $C_u(Y)$ ми позначаємо банахів простір $(C(Y), \|\cdot\|)$, де $\|\cdot\|$ — рівномірна норма на $C(Y)$, що визначається рівністю

$$\|g\| = \max_{y\in Y} |g(y)|.$$

Для топологічних просторів X і Y символом $C(X\times Y)$ ми позначаємо *простір усіх сукупно неперервних функцій* $f: X\times Y \to \mathbb{R}$, тобто функцій, які є неперервними на топологічному добутку $X\times Y$. Ясно, що $C(X\times Y) \subseteq CC(X\times Y)$.

Теорема 2. *Нехай X — топологічний простір, Y — компактний простір і φ — вертикальне розшарування функції $f: X\times Y\to\mathbb{R}$. Тоді наступні умови еквівалентні:*

(i) $f \in C(X\times Y)$;

(ii) $\varphi(X) \subseteq C(Y)$ *і відображення* $\varphi: X \to C_u(Y)$ — *неперервне.*

Доведення. (i)⇒(ii). Нехай $f\in C(X\times Y)$. Тоді $f\in CC(X\times Y)$, отже, $\varphi(X)\subseteq C(Y)$ за теоремою 1.

Доведемо, що відображення $\varphi: X\to C_u(Y)$ — неперервне. Нехай $x_0\in X$ і $\varepsilon>0$. Оскільки функція f — сукупно неперервна, то для кожного $y\in Y$ можна знайти такі відкриті околи U_y точки x_0 в X і V_y точки y в Y, що

$$|f(u,v)-f(x_0,y)| < \frac{\varepsilon}{2},$$

як тільки $(u,v)\in U_y\times V_y$. Система $\{V_y : y\in Y\}$ — це відкрите покриття компактного простору Y. Тому існують такі точки $y_1,\dots,y_n$, що

$$Y = \bigcup_{k=1}^{n} V_{y_k}.$$

Покладемо $U = \bigcap_{k=1}^{n} U_{y_k}$. Зрозуміло, що U — це окіл точки x_0 у просторі X. Нехай $x\in U$ і $y\in Y$. Знайдемо такий індекс $k=1,\dots,n$, що $y\in V_{y_k}$. Тоді

$$|f^x(y)-f^{x_0}(y)| = |f(x,y)-f(x_0,y)| \le |f(x,y)-f(x_0,y_k)|+|f(x_0,y_k)-f(x_0,y)| < \frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon,$$

бо x і x_0 входять в U_{y_k}, а $y\in V_{y_k}$. Тому і

$$\|\varphi(x)-\varphi(x_0)\| = \max_{y\in Y}|f^x(y)-f^{x_0}(y)| < \varepsilon,$$

як тільки $x\in U$, а це і дає нам неперервність φ у точці x_0.

(ii)⇒(i). Нехай $\varphi(X)\subseteq C(Y)$ і відображення $\varphi: X\to C_u(Y)$ — неперервне. Розглянемо точку $p_0=(x_0,y_0)\in X\times Y$ і доведемо, що функція f неперервна в точці p_0. Для даного $\varepsilon>0$ знайдемо такий окіл U точки x_0 в X, що $\|\varphi(x)-\varphi(x_0)\| < \frac{\varepsilon}{2}$, як тільки $x\in U$. Скориставшись неперервністю функції $f^{x_0}: Y\to\mathbb{R}$ у точці y_0, знайдемо такий окіл V точки y_0 в Y, що $|f^x(y)-f^{x_0}(y_0)| < \frac{\varepsilon}{2}$, як тільки $y\in V$. Тоді для точки $p=(x,y)\in U\times V$ будемо мати

$$|f(p)-f(p_0)| \le |f(x,y)-f(x_0,y)| + |f(x_0,y)-f(x_0,y_0)| =$$
$$|f^x(y)-f^{x_0}(y)| + |f^{x_0}(y)-f^{x_0}(y_0)| \le \|\varphi(x)-\varphi(x_0)\| + \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon,$$

що і дає нам неперервність f у точці p_0. □

4. Для підпростору L простору $C(Y)$ покладемо

$$CL(X\times Y) = \{f\in CC(X\times Y) : \varphi(X)\subseteq L\},$$

де, як і раніше, φ — асоційоване з f відображення.

Нехай Y — компактний простір і L — всюди щільний підпростір $C_u(Y)$. Розглянемо такі проблеми:

***Проблема** I /I′/.* Для яких підпросторів L для кожної функції $f\in CC(X\times Y)$ існує послідовність функцій $f_n\in CL(X\times Y)$ /$f_n\in CL(X\times Y)\cap C(X\times Y)$/ така, що $f_n^x\to f^x$ в $C_u(Y)$ для кожного $x\in X$?

***Проблема** II /II′/.* Для яких підпросторів L для кожної функції $f\in C(X\times Y)$ існує послідовність функцій $f_n\in CL(X\times Y)\cap C(X\times Y)$ /$f_n\in CL(X\times Y)$/ така, що $f_n^x\to f^x$ в $C_u(Y)$ для кожного $x\in X$?

Неперервне відображення $\varphi: X\to C_p(Y)$ / $\varphi: X\to C_u(Y)$ / назвемо *p-неперервним /u-неперервним/* відображенням. З теорем 1 і 2 випливає, що p-неперервні відображення відповідають нарізно неперервним функціям, а u-неперервні — сукупно неперервним. Тому вказані проблеми можна переформулювати в еквівалентному вигляді так:

***Проблема** $\alpha\beta$.* Нехай $\alpha=p,u$, $\beta=p,u$. Для яких підпросторів L для кожного α-неперервного відображення $\varphi: X\to C(Y)$ існує послідовність β-неперевних відображень $\varphi_n: X\to L$ така, що $\varphi_n(x)\to\varphi(x)$ в $C_u(Y)$ на X?

Таким чином, поставлені спочатку проблеми I, I', II, II' рівносильні відповідно проблемам *pp*, *pu*, *uu*, *up*.

Використовуючи аксіому вибору і умову $\overline{L}=C_u(Y)$, легко для довільного відображення $\varphi: X\to C(Y)$ побудувати послідовність відображень $\varphi_n: X\to L$ таких, що $\varphi_n(x)\to\varphi(x)$ в $C_u(Y)$ на X. А от чи можна для кожного p-неперервного чи u-неперервного відображення $\varphi: X\to C(Y)$ зберегти при побудові апроксимуючих відображень $\varphi_n: X\to L$ тип його неперервності або його підсилити чи послабити — оце і є суть наших проблем I, I', II, II'.

Нехай знову $\alpha=p,u$, $\beta=p,u$ і L — підпростір $C_u(Y)$. Ми будемо говорити, що L — це *$\alpha\beta$-простір* для простору X, якщо для кожного α-неперервного відображення $\varphi: X\to C(Y)$ існує послідовність β-неперевних відображень $\varphi_n: X\to L$ така, що $\varphi_n(x)\to\varphi(x)$ в $C_u(Y)$ на X. Таким чином, проблема $\alpha\beta$ полягає у тому, щоб для топологічного простору X і компактного простору Y описати всі $\alpha\beta$-простори для X у $C_u(Y)$.

5. Для $\alpha=p,u$ і $\beta=p,u$ неперервний оператор $A: C_\alpha(Y)\to C_\beta(Y)$ ми називаємо *$\alpha\beta$-неперервним.* Таким чином, ми одержуємо чотири типи неперервності операторів $A: C(Y)\to C(Y)$. Вони пов'язані між собою такими імплікаціями:

$$\begin{array}{ccc} pu\text{-неперервність} & \Rightarrow & pp\text{-неперервність} \\ \Downarrow & & \Downarrow \\ uu\text{-неперервність} & \Rightarrow & up\text{-неперервність} \end{array}$$

Це негайно випливає з того, що топологія $\mathcal{T}_u$ рівномірної збіжності на просторі $C(Y)$, тобто топологія простору $C_u(Y)$ мажорує топологію $\mathcal{T}_p$ поточкової збіжності на $C(Y)$, тобто топологію простору $C_p(Y)$.

Нехай X і Y — топологічні простори, $f : X \times Y \to \mathbb{R}$ — неперервна відносно другої змінної функція і $A : C(Y) \to C(Y)$ — деякий оператор. Тоді формулою

$$g(x,y) = (Af^x)(y)$$

визначається деяка функція $g : X \times Y \to \mathbb{R}$, яка теж буде неперервною відносно другої змінної. Нехай $\varphi : X \to C(Y)$ і $\psi : X \to C(Y)$ — відображення, асоційовані з функціями f і g відповідно. Тоді

$$\psi(x) = g^x = Af^x = A(\varphi(x))$$

для кожного $x \in X$, тобто $\psi = A \circ \varphi$. Тому на основі теорем 1 і 2 та теореми про неперервність композиції отримуємо наступний результат.

Теорема 3. *Нехай X — топологічний простір, Y — компактний простір, $f : X \times Y \to \mathbb{R}$ — функція, неперервна відносно другої змінної, $A : C(Y) \to C(Y)$ — оператор, і для $x \in X$, $y \in Y$*

$$g(x,y) = (Af^x)(y).$$

Тоді:

а) $f \in CC(X \times Y)$ і A — pp-неперервний $\Rightarrow g \in CC(X \times Y)$;

б) $f \in CC(X \times Y)$ і A — pu-неперервний $\Rightarrow g \in C(X \times Y)$;

в) $f \in C(X \times Y)$ і A — up-неперервний $\Rightarrow g \in CC(X \times Y)$;

г) $f \in C(X \times Y)$ і A — uu-неперервний $\Rightarrow g \in C(X \times Y)$.

6. Послідовність операторів $A_n : C(Y) \to L$ називається *апроксимуючою* для підпростору L простору $C(Y)$, якщо $A_n g \to g$ в $C_u(Y)$ для кожного $g \in C(Y)$. З аксіоми вибору негайно випливає, що для кожного всюди щільного підпростору L простору $C_u(Y)$ існує апроксимуюча послідовність операторів $A_n : C(Y) \to L$.

Апроксимуючу послідовність операторів $A_n : C(Y) \to L$ ми називаємо *$\alpha\beta$-апроксимуючою для L* ($\alpha, \beta = p, u$), якщо всі відображення A_n є $\alpha\beta$-неперервними.

Нехай s — одна з комбінацій pp, pu, uu, up. Підпростір L простору $C(Y)$ ми називатимемо *as-простором*, якщо існує s-апроксимуюча послідовність операторів $A_n : C(Y) \to L$.

Теорема 4. *Нехай Y — компактний простір і L — підпростір простору $C(Y)$ і $s \in \{pp, pu, up, uu\}$. Тоді наступні властивості рівносильні:*

(i) L є as-простором;

(ii) L є s-простором для кожного топологічного простору X.

Доведення. (i)$\Rightarrow$ (ii). Припустимо, що L — це as-простір і X — довільний топологічний простір. Тоді існує s-апроксимуюча послідовність операторів $A_n : C(Y) \to L$. Для функції $f \in CC(X \times Y)$ розглянемо функції $f_n : X \times Y \to \mathbb{R}$, які визначаються так:

$$f_n(x,y) = (A_n f^x)(y).$$

Ясно, що $f_n^x = A_n f^x \to f^x$ в $C_u(Y)$для кожного $x \in X$, причому $f_n^x \in L$ для кожного n. Якщо $f \in CC(X \times Y)$ і s — це pp чи pu, то згідно з теоремою 3 отримуємо, що $f_n \in CC(X \times Y)$ чи $f_n \in C(X \times Y)$ відповідно, отже, L – це s-простір для X. Якщо ж $f \in C(X \times Y)$ і $s = uu$ або up, то знову з теореми 3 випливає, що $f_n \in C(X \times Y)$ або $f_n \in CC(X \times Y)$ відповідно, отже, і тут L є s-простором.

(ii)$\Rightarrow$ (i). Нехай навпаки L є s-простором для кожного топологічного простору X, де $s = \alpha\beta$, $\alpha = p$ або u, і $\beta = p$ або u. Тоді для кожного α-неперервного відображення $\varphi : X \to C(Y)$ існує послідовність β-неперервних відображень $\varphi_n : X \to L$ така, що $\varphi_n(g) \to \varphi(g)$ на X у просторі $C_u(Y)$. Візьмемо за X топологічний простір $C_\alpha(Y)$. Тотожне відображення $\varphi : X \to C(Y)$, $\varphi(g) = g$, очевидно — α-неперервне. Тому існує така послідовність β-неперервних відображень $\varphi_n : X \to L$, що $\varphi_n(g) \to g$ в $C_u(Y)$ для кожного $g \in C(Y)$. Оператори $A_n : C(Y) \to L$, $A_n g = \varphi_n(g)$, є $\alpha\beta$-неперервними і $A_n g \to g$ в $C_u(Y)$ для кожного $g \in C(Y)$. Таким чином, $(A_n)_{n=1}^\infty$ – це $\alpha\beta$-апроксимуюча послідовність для L. □

Відповідно до проблем $\alpha\beta$ з п.4, для кожного $s = pp, pu, uu, up$ постає

***Проблема** III_s.* Дослідити, які всюди щільні в $C_u(Y)$ підпростори будуть as-просторами?

Введені у цьому пункті класи просторів L пов'язані між собою такими імплікаціями:

$$\begin{array}{ccc} L - apu\text{-простір} & \Rightarrow & L - app\text{-простір} \\ \Downarrow & & \Downarrow \\ L - auu\text{-простір} & \Rightarrow & L - aup\text{-простір} \end{array}$$

У зв'язку з цим постає і наступна

***Проблема** IV.* Чи вірно, що інших зв'язків між as-просторами, окрім вказаних на схемі, не існує?

7. Наведемо деякі приклади апроксимуючих послідовностей операторів.

Приклад 1. *Оператори Бернштейна*

$$(B_n g)(y) = \sum_{n=0}^{n} C_n^k g\left(\frac{k}{n}\right) y^k (1-y)^{n-k}$$

утворюють pu-апроксимуючу послідовність для підпростору P всіх алгебраїчних поліномів у просторі $C[0,1]$ (див. [1]).

Приклад 2. *Нехай M — підпростір $C[0,1]$, що складається з усіх неперервних кусково-лінійних функцій $h:[0,1]\to\mathbb{R}$. Співставимо кожній функції $g\in C[0,1]$ функцію $h=A_ng\in M$, графіком якої є ламана з вершинами в точках $\left(\frac{k}{n},g\left(\frac{k}{n}\right)\right)$, де $k=0,1,\dots,n$. Легко перевірити, що $(A_n)_{n=1}^{\infty}$ — це pu-апроксимуюча послідовність для підпростору M. Така послідовність фактично розглядалася в [10], [15].*

Приклад 3. *Позначимо символом $C_{2\pi}$ банахів простір неперервних 2π-періодичних функцій $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ з нормою $\|g\|=\max\limits_{t\in\mathbb{R}}|g(t)|$. Нехай $\mathbb{S}=\{z\in\mathbb{C}:|z|=1\}$ — одиничне коло на площині $\mathbb{C}$. Якщо співставити кожній функції $h\in C(\mathbb{S})$ функцію $g=Uh\in C_{2\pi}$, для якої $g(y)=h(e^{iy})$ для $y\in\mathbb{R}$, то ми отримаємо ізометрію $U:C_u(\mathbb{S})\to C_{2\pi}$. Ця ізометрія дозволяє ототожнити простір $CC(X\times\mathbb{S})$ з простором $CC_{2\pi}(X\times\mathbb{R})$ нарізно неперервних 2π-періодичних відносно другої змінної функцій $f:X\times\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, а простір $C(X\times\mathbb{S})$ — з відповідним підпростором простору $CC_{2\pi}(X\times\mathbb{R})$, що складається з сукупно неперервних функцій $f:X\times\mathbb{R}\to\mathbb{R}$. Тому для підпросторів простору $C_{2\pi}$ можна ввести ті ж поняття, що й для підпросторів простору $C_u(\mathbb{S})$, як це ми робили раніше.*

Зокрема, послідовність операторів Джексона

$$(J_ng)(y)=\frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n}g(y_k)K_n(y-y_k),$$

де $y_k=\frac{2k\pi}{n+1}$ і $K_n(t)=\frac{2}{n+1}\left(\frac{\sin\frac{(n+1)t}{2}}{2\sin\frac{t}{2}}\right)^2$ — ядра Фейєра, є pu-апроксимуючою для підпростору T всіх тригонометричних поліномів у просторі $C_{2\pi}$.

Але вже послідовність операторів Фейєра

$$(F_ng)(y)=\frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi}g(y+t)K_n(t)dt$$

є uu-апроксимуючою для T, але не pp-апроксимуючою, а значить, і не pu-апроксимуючою для T. Ці результати були анонсовані у [4] і доведені в [6].

8. За допомогою базису Фабера-Шаудера в $C_u[0,1]$ і теореми про близькі базиси можна розв'язати проблему III_{uu} для простору $C[0,1]$.

Нагадаємо, базис Фабера-Шаудера простору $C_u[0,1]$ будується так [14, с.31]. Кожному двійково-раціональному числу $r=\frac{2k-1}{2^n}$, де $n\in\mathbb{N}$ і $k=1,\dots,2^{n-1}$, співставимо кусково-лінійну функцію $\varphi_r:[0,1]\to\mathbb{R}$, графіком якої є ламана з вершинами $(0,0)$, $(\frac{k-1}{2^{n-1}},0)$, $(\frac{2k-1}{2^n},1)$, $(\frac{k}{2^{n-1}},0)$ і $(1,0)$. Крім того, розглянемо функції $\varphi_0(y)=1-y$ і $\varphi_1(y)=y$. Перенумеруємо усі двійково-раціональні числа з відрізка [0,1] за їх рангами у послідовність

$$0,1,\frac12,\frac14,\frac34,\frac18,\frac38,\frac58,\frac78,\dots$$

і позначимо через r_k — k-тий член цієї послідовності. Нехай $g_k=\varphi_{r_{k-1}}$ при $k\in\mathbb{N}$. Тоді послідовність $(g_k)_{k=1}^{\infty}$ — це базис у просторі $C_u[0,1]$, який називається *базисом Фабера-Шаудера.*

Два базиси $(x_k)_{k=1}^{\infty}$ і $(y_k)_{k=1}^{\infty}$ у банахових просторах X і Y відповідно називаються *еквівалентними*, якщо існує такий ізоморфізм $U:X\to Y$, що $Ux_k=y_k$ для кожного k.

Нам потрібна буде наступна теорема про близькі базиси [11, с.5].

Теорема 5. *Нехай $(x_k)_{k=1}^{\infty}$ — нормований базис у банаховому просторі X з базисною константою K і $(y_k)_{k=1}^{\infty}$ — послідовність векторів з X, для якої $\sum\limits_{k=1}^{\infty}\|x_k-y_k\|<\frac{1}{2K}$. Тоді і $(y_k)_{k=1}^{\infty}$ — це базис в X, який є еквівалентним базису $(x_k)_{k=1}^{\infty}$.*

Повне розв'язання проблеми III_{uu} (а значить і III_{up}) у просторі $C[0,1]$ дає наступна теорема.

Теорема 6. *Кожен всюди щільний в $C_u[0,1]$ лінійний підпростір L є uu-простором.*

Доведення. Нехай $(g_k)_{k=1}^{\infty}$ — базис Фабера-Шаудера в $C_u[0,1]$, а K — його базисна константа. Розглянемо лінійний підпростір M простору $C[0,1]$, що складається з усіх неперервних кусково-лінійних функцій. Зрозуміло, що $g_k\in M$ для кожного k. Кожна функція $g\in C[0,1]$ єдиним чином зображається у вигляді

$$g=\sum_{k=1}^{\infty}c_k(g)g_k,$$

де ряд збігається у просторі $C_u[0,1]$. Лінійні функціонали $c_k:C_u[0,1]\to\mathbb{R}$, як добре відомо [11, с.7], є неперервними (навіть p-неперервними [14, с.32]), а тому оператори

$$S_ng=\sum_{k=1}^{n}c_k(g)g_k$$

є uu-неперервними (і навіть pu-неперервними), причому $imS_n\subseteq M$ і $S_ng\to g$ в $C_u[0,1]$.

Нехай L — всюди щільний лінійний підпростір простору $C_u[0,1]$. Для кожного номера k існує така функція $h_k\in L$, що

$$\|g_k-h_k\|<\frac{1}{2^{k+1}K}.$$

Тоді

$$\sum_{k=1}^{\infty}\|g_k-h_k\|<\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{2^{k+1}K}=\frac{1}{2K}.$$

Тому за теоремою 5 послідовність $(h_k)_{k=1}^{\infty}$ — це базис в $C_u[0,1]$, який є еквівалентним базису $(g_k)_{k=1}^{\infty}$. В такому разі існує ізоморфізм $U:C_u[0,1]\to C_u[0,1]$ такий, що $Ug_k=h_k$ для кожного k.

Для кожного n покладемо

$$A_n=US_nU^{-1}.$$

Ясно, що оператори A_n є *ии*-неперервними, бо U, S_n і U^{-1} є такими. Нехай $h \in C[0,1]$ і $g = U^{-1}h$. Тоді

$$A_n h = US_n g = U\Big(\sum_{k=1}^{n} c_k(g) g_k\Big) = \sum_{k=1}^{n} c_k(g) U g_k = \sum_{k=1}^{n} c_k(g) h_k \in L.$$

Таким чином, $A_n(C[0,1]) \subseteq L$ для кожного n. Крім того,

$$A_n h = US_n g \to Ug = h.$$

Отже, $(A_n)_{n=1}^{\infty}$ — це *ии*-апроксимуюча послідовність для L. □

Ми не знаємо відповіді на таке питання:

Проблема V. Чи є серед всюди щільних лінійних підпросторів L простору $C_u[0,1]$ такі, що не є *ари*-просторами? *арр*-просторами?

9. Таким самим способом легко встановлюється загальніший результат, в якому термін базис означає базис Шаудера.

Теорема 7. *Нехай Y — такий компактний простір, що простір $C_u(Y)$ має базис і L — всюди щільний лінійний підпростір $C_u(Y)$. Тоді L — це аии-простір.*

Таким чином, відомо ([11, с.4], [9, 13]), що простір $C_u[0,1]^n$ має базис. Більше того [14, теорема 4.4.13], для довільного метризовного компакта Y простір $C_u(Y)$ має базис. Чи є базис у кожного сепарабельного простору $C_u(Y)$ ми не знаємо.

З теореми 7 негайно випливає наступна теорема.

Теорема 8. *Нехай Y — такий компактний простір, що простір $C_u(Y)$ має базис, L — всюди щільний лінійний підпростір $C_u(Y)$, X — топологічний простір і $f \in C(X \times Y)$. Тоді існує така послідовність сукупно неперервних CL-функцій $f : X \times Y \to \mathbb{R}$, що $f_n^x \to f^x$ в $C_u(Y)$ для кожного $x \in X$.*

Більше того, поняття *аии*-простору можна ввести і в довільному нормованому просторі. Справді, нехай E — нормований простір і L — його всюди щільний підпростір. Такий підпростір L ми назвемо *апроксимаційним*, якщо існує послідовність неперервних операторів $A_n : E \to L$ така, що $A_n g \to g$ в E для кожного $g \in E$. Застосовуючи теорему про близькі базиси, так само, як в теоремі 5, отримуємо такий результат.

Теорема 9. *Нехай E — банаховий простір з базисом і L — всюди щільний лінійний підпростір E. Тоді L є апроксимаційним підпростором E.*

10. На завершення сформулюємо загальну проблему, яка охоплює частину розглянутих тут задач.

Нехай $(E, \mathcal{T})$ — топологічний простір E з топологією $\mathcal{T}$. Його підпростір L назвемо *секвенціально всюди щільним*, якщо для кожної точки $g \in E$ існує така послідовність точок $g_n \in L$, що $g_n \to g$ в E. Припустимо, що на E задана ще одна топологія $\mathcal{S}$.

Для топологічного простору X через $C_{\mathcal{S}}(X, E)$ позначимо сукупність всіх неперервних відображень $\varphi : X \to (E, \mathcal{S})$.

Проблема VI. Нехай L — секвенціально всюди щільний підпростір топологічного простору $(E, \mathcal{T})$, $\mathcal{S}$ — топологія на E і X — топологічний простір. За яких умов для кожного відображення $\varphi \in C_{\mathcal{S}}(X, E)$ існує послідовність відображень $\varphi_n \in C_{\mathcal{S}}(X, E)$ така, що $\varphi_n(x) \to \varphi(x)$ в $(E, \mathcal{T})$ для кожного $x \in X$?

Література

1. Власюк Г.А., Маслюченко В.К. *Многочлени Бернштейна і нарізно неперервні функції* // Наук. вісн. Чернів. ун-ту. Математика. – 2007.– Вип. 336-337. – С. 52–59.

2. Волошин Г.А. Про еквівалентність двох апроксимаційних властивостей підпросторів простору неперервних функцій // Міжнар. конф. "Сучасні проблеми аналізу", присв. 70-річчю каф. мат. аналізу Чернів. ун-ту. 30 вересня – 3 жовтня, 2010, Чернівці. Тези доповідей. – Чернівці: Книги - XXI, 2010. – С.53–55.

3. Волошин Г.А., Маслюченко В.К. *До питання про узагальнення однієї теореми Бернштейна* // FM 2009 Conference "Functional Methods in Approximation Theory and Operator Theory III" dedicated to the memory of V.K. Dzyadyk (1919-1998). August 22-26, 2009. Abstracts. – Kuiv. – 2009. – C.106–107.

4. Волошин Г.А., Маслюченко В.К. *Наближення нарізно неперервних функцій, 2π-періодичних відносно другої змінної* // Всеукраїнський науковий семінар "Сучасні проблеми теорії ймовірностей та математичного аналізу", 25-28 березня, 2010. Тези доповідей. – Івано-Франківськ: Прикарп. нац. ун-т. – 2010. – С. 27–28.

5. Волошин Г.А., Маслюченко В.К. *Нарізно неперервні відображення і теорія наближень* www.imath.kiev.ua/~congress2009/Abstracts/Masluchenko.html

6. Волошин Г.А., Маслюченко В.К. *Про наближення нарізно неперервних функцій, 2π-періодичних відносно другої змінної* // Карпат. мат. публ. – 2010. – Т.2, №1. –С. 4–14.

7. Волошин Г.А., Маслюченко В.К., Маслюченко О.В. *Наближення нарізно і сукупно неперервних функцій* // Всеукраїнський науковий семінар "Сучасні проблеми теорії ймовірностей та математичного аналізу", 25-28 березня, 2010. Тези доповідей. – Івано-Франківськ: Прикарп. нац. ун-т, 2010. – С. 2–3.

8. Маслюченко В.К. Перші типи топологічних векторних просторів. – Чернівці: Рута, 2002. – 72с.

9. Ciesielski Z., Domsta J. *Consttuction of an orthonormal basis in $C^m(I^d)$ and $W_p^m(I^d)$*, Studia Math., **41**(1972), 211–224.

10. Lebesque H. *Sur l'approximation des fonctions*, Bull. Sci. Math., **22** (1898), 278–287.

11. Lindenstrauss J., Tzafriri L. Classical Banach Spaces. I. Sequence spaces, Berlin, Heideberg, New-York: Springer-Verlag, 1977. – 188p.

12. Maslyuchenko V., Voloshyn H. *On Approximation of the separately continuous and continuously holomorphic functions* // International conference "Analytic methods of mechanics and complex analysis" dedicated to N. A. Kilchevskii and V.A. Zmorovich, 29 June - 5 July, 2009. Abstracts, Kiev, 2010, 59–60.

13. Schonefeld S. *Schauder bases in the Banach spaces $C^k(T^q)$*, Trans. Amer. Math. Soc., **165** (1972), 309–318.

14. Semadeni Z. Schauder bases in Banach spaces of continuous functions, Berlin, Heideberg, New-York: Springer-Verlag, 1982. – 136p.

15. Tsuji M. *On Bair's Theorem concerning a function $f(x,y)$ which is continuous with respect to each variable x and y*, J. Math. Soc. Japan, **2**,3-4 (1951), 210–212.

Чернівецький національний університет ім. Ю. Федьковича,
Чернівці, Україна

Надійшло 8.11.2010

Voloshyn H.A., Maslyuchenko V.K., Maslyuchenko O.V. *On approximation of the separately and jointly continuous functions*, Carpathian Mathematical Publications, **2**, 2 (2010), 10–20.

We investigate the following problem: which dense subspaces L of the Banach space $C(Y)$ of continuous functions on a compact Y and topological spaces X have such property, that for every separately or jointly continuous functions $f : X \times Y \to \mathbb{R}$ there exists a sequence of separately or jointly continuous functions $f_n : X \times Y \to \mathbb{R}$ such, that $f_n^x = f_n(x, \cdot) \in L$ for arbitrary $n \in \mathbb{N}$, $x \in X$ and $f_n^x \rightrightarrows f^x$ on Y for every $x \in X$? In particular, it was shown, if the space $C(Y)$ has a basis that every jointly continuous function $f : X \times Y \to \mathbb{R}$ has jointly continuous approximations f_n such type.

Волошин Г.А., Маслюченко В.К., Маслюченко О.В. *О приближении раздельно и совокупно непрерывных функций* // Карпатские математические публикации. — 2010. — Т.2, №2. — С. 10–20.

Исследуется проблема: какие из всюду плотных подпространств L банахового пространства $C(Y)$ непрерывных функций на компакте Y и топологических пространств X обладают тем свойством, что для каждой раздельно или совокупно непрерывной функции $f : X \times Y \to \mathbb{R}$ существует такая последовательность раздельно или совокупно непрерывных функций $f_n : X \times Y \to \mathbb{R}$, что $f_n^x = f_n(x, \cdot) \in L$ для произвольных $n \in \mathbb{N}$, $x \in X$, и $f_n^x \rightrightarrows f^x$ на Y для каждого $x \in X$. Показано, что если пространство $C(Y)$ имеет базис, то каждая совокупно непрерывная функция $f : X \times Y \to \mathbb{R}$ имеет совокупно непрерывные аппроксимации f_n такого рода.

Карпатські математичні публікації. Т.2, №2

Carpathian Mathematical Publications. V.2, №2

УДК 517.98

Дмитришин М.І.

ПРОСТОРИ ВЕКТОРІВ ЕКСПОНЕНЦІАЛЬНОГО ТИПУ КОМПЛЕКСНИХ СТЕПЕНІВ ПОЗИТИВНИХ ОПЕРАТОРІВ

Дмитришин М.І. *Простори векторів експоненціального типу комплексних степенів позитивних операторів* // Карпатські математичні публікації. — 2010. — Т.2, №2. — С. 21–30.

Визначено нові класи інтерполяційних просторів векторів експоненціального типу комплексних степенів позитивних операторів. Досліджено властивості апроксимаційних просторів, породжених розглянутими інтерполяційними просторами. Наведено приклад застосування до регулярних еліптичних граничних задач, в якому вектори експоненціального типу співпадають з кореневими векторами, а для операторів із сталими коефіцієнтами є підкласом цілих функцій експоненціального типу.

Вступ

У даній статті визначено нові класи інтерполяційних просторів векторів експоненціального типу комплексних степенів позитивних операторів і досліджено їхні інтерполяційні властивості, що узагальнюють відповідні результати роботи [5].

Розглянуто апроксимаційні простори, породжені інтерполяційними просторами векторів експоненціального типу, та отримано нерівності, що оцінюють мінімальну відстань від заданого елемента до підпростору векторів експоненціального типу з фіксованим індексом. Зазначимо, що розв'язанню проблеми наближення елементів банахового простору різними класами гладких векторів замкненого оператора, у тому числі векторами експоненціального типу, присвячено роботи [1, 2]. У цьому зв'язку відзначимо також роботу [4], де наведено застосування до згаданої проблеми поняття квазінормованого абстрактного простору Бєсова.

Тут наведено приклад застосування отриманих абстрактних результатів для регулярних еліптичних операторів, вектори експоненціального типу яких співпадають з кореневими векторами, а у випадку сталих коефіцієнтів є підкласом цілих функцій експоненціального типу.

2000 *Mathematics Subject Classification:* 41A65, 47A57, 47A58, 46E35.
Ключові слова і фрази: вектори експоненціального типу, позитивні оператори, апроксимаційні простори.

1 Інтерполяційні простори векторів експоненціального типу

Розглядаємо позитивний оператор A зі щільною областю визначення $\mathcal{C}^1$ в деякому комплексному банаховому просторі X. Згідно з означенням це значить, що піввісь $(-\infty,0]$ належить його резольвентній множині та існує таке число $c>0$, що

$$\|(A-\lambda I)^{-1}\| \le \frac{c}{1+|\lambda|}, \qquad \lambda\in(-\infty,0].$$

Через $\mathcal{C}^k$ $(k\in\mathbb{Z}_+)$ позначаємо область визначення оператора A^k з нормою $\|x\|_{\mathcal{C}^k}=\|A^kx\|_X$ $(x\in\mathcal{C}^k)$. При цьому $A^0=I$ — одиничний оператор і $\mathcal{C}^0=X$.

Нехай $0<\theta<1$ та $1\le q\le\infty$. Слідуючи [10], для пари комплексних банахових просторів $\{X,Y\}$ визначаємо інтерполяційний простір

$$(X,Y)_{\theta,q}=\left\{a\in X+Y:\ \|a\|_{(X,Y)_{\theta,q}}<\infty\right\}$$

з нормою

$$\|a\|_{(X,Y)_{\theta,q}}=\begin{cases}\left(\displaystyle\int_0^\infty\left[t^{-\theta}\mathcal{K}(t,a;X,Y)\right]^q\frac{dt}{t}\right)^{1/q} & : \ q<\infty,\\ \displaystyle\sup_{0<t<\infty}t^{-\theta}\mathcal{K}(t,a;X,Y) & : \ q=\infty,\end{cases}$$

де $\mathcal{K}(t,a;X,Y)=\inf\limits_{a=x+y}\left(\|x\|_X+t\,\|y\|_Y\right)$, а також інтерполяційний простір $[X,Y]_\theta=\{a\in X+Y:\ \exists\ f(z)\in\mathcal{F}(X,Y),\ f(\theta)=a\}$ з нормою $\|a\|_{[X,Y]_\theta}=\inf\limits_{f(\theta)=a}\|f(z)\|_{\mathcal{F}(X,Y)}$, де інфімум беремо по всіх функціях $f\in\mathcal{F}(X,Y)$, таких що $f(\theta)=a$. Через $\mathcal{F}(X,Y)$ вище позначено простір $(X+Y)$-значних аналітичних в $S=\{z\in\mathbb{C}:0<\operatorname{Re}z<1\}$ функцій, неперервних в замиканні $\overline{S}$ і таких, що мають скінченну норму $\|f\|_{\mathcal{F}(X,Y)}=\max\left(\sup\limits_t\|f(it)\|_X,\sup\limits_t\|f(1+it)\|_Y\right)$, $f(it)\in X$, $f(1+it)\in Y$ для всіх $-\infty<t<\infty$.

Нехай $m,k\in\mathbb{Z}$, $m\ge 0$. Відомо (див. [10, § 1.15.1]), що для всіх $\alpha\in\mathbb{C}$ таких, що $-m<\operatorname{Re}\alpha\le\sigma-m$, $0<\sigma<k$, і всіх елементів $x\in\left(X,\mathcal{C}^k\right)_{\sigma/k,1}$ визначеним буде оператор

$$A^\alpha_\sigma x=\frac{\Gamma(k)}{\Gamma(\alpha+m)\Gamma(k-m-\alpha)}\int_0^\infty t^{\alpha+m-1}A^{k-m}(A+tI)^{-k}x\,dt,$$

що допускає замикання A^α в X, яке не залежить від вибору σ. Область визначення $\mathcal{C}^\alpha$ оператора A^α далі розглядаємо як банахів простір з нормою $\|x\|_{\mathcal{C}^\alpha}=\|A^\alpha x\|_X$, $x\in\mathcal{C}^\alpha$. Таким чином, оператор A^α і простір $\mathcal{C}^\alpha$ визначені для всіх чисел $\alpha\in\mathbb{C}$. Оператор A^α — неперервний при $\operatorname{Re}\alpha<0$ та ізоморфно відображає $\mathcal{C}^\alpha$ на X при $\operatorname{Re}\alpha>0$ [10, теорема 1.15.2]. Підпростір $\mathcal{C}^k$ щільний в X [10, лема 1.14.1], а щільність $\mathcal{C}^\alpha$ в X є наслідком вкладень $\mathcal{C}^k\subset\left(X,\mathcal{C}^k\right)_{\sigma/k,1}\subset\mathcal{C}^\alpha\subset X$. Для довільних $\alpha,\beta\in\mathbb{C}$ справедливими є рівності $A^\alpha A^\beta=A^\beta A^\alpha=A^{\alpha+\beta}$ і оператор A^β ізоморфно відображає $\mathcal{C}^{\alpha+\beta}$ на $\mathcal{C}^\alpha$ [10, теорема 1.15.2]. Зокрема $\mathcal{C}^{\alpha+\beta}\subset\mathcal{C}^\alpha$, отже, $\mathcal{C}^\infty\subset\bigcap_\beta\mathcal{C}^{\alpha+\beta}\subset\mathcal{C}^\infty$, де $\mathcal{C}^\infty:=\bigcap_{k\in\mathbb{Z}_+}\mathcal{C}^k$.

Далі для довільного $x\in\mathcal{C}^\infty=\bigcap_{k\in\mathbb{Z}_+}\mathcal{C}^{\alpha+k}$ покладемо $x_k:=A^kx\in\mathcal{C}^\alpha$. Для чисел $1\le q\le\infty$, $\nu>0$ визначимо простори

$$\mathcal{E}^\nu_q(\mathcal{C}^\alpha)=\left\{x\in\mathcal{C}^\infty:\ \|x\|_{\mathcal{E}^\nu_q(\mathcal{C}^\alpha)}=\left(\sum\nolimits_{k\in\mathbb{Z}_+}\nu^{-kq}\|x_k\|^q_{\mathcal{C}^\alpha}\right)^{1/q}<\infty\right\},$$

$$\mathcal{E}^\nu_\infty(\mathcal{C}^\alpha)=\left\{x\in\mathcal{C}^\infty:\ \|x\|_{\mathcal{E}^\nu_\infty(\mathcal{C}^\alpha)}=\sup_{k\in\mathbb{Z}_+}\nu^{-k}\|x_k\|_{\mathcal{C}^\alpha}<\infty\right\}.$$

Для $1\le q<\infty$ і $0\le\operatorname{Re}\alpha<\operatorname{Re}\beta<\infty$ розглянемо також простори

$$\mathcal{E}^\nu_q(\mathcal{C}^\alpha,\mathcal{C}^\beta)_{\theta,q}=\left\{x\in\mathcal{C}^\infty:\ \sum\nolimits_{k\in\mathbb{Z}_+}\nu^{-kq}\|x_k\|^q_{(\mathcal{C}^\alpha,\mathcal{C}^\beta)_{\theta,q}}<\infty\right\},$$

$$\mathcal{E}^\nu_q[\mathcal{C}^\alpha,\mathcal{C}^\beta]_\theta=\left\{x\in\mathcal{C}^\infty:\ \sum\nolimits_{k\in\mathbb{Z}_+}\nu^{-kq}\|x_k\|^q_{[\mathcal{C}^\alpha,\mathcal{C}^\beta]_\theta}<\infty\right\}$$

з нормами

$$\|x\|_{\mathcal{E}^\nu_q(\mathcal{C}^\alpha,\mathcal{C}^\beta)_{\theta,q}}=\Big(\sum_{k\in\mathbb{Z}_+}\nu^{-kq}\|x_k\|^q_{(\mathcal{C}^\alpha,\mathcal{C}^\beta)_{\theta,q}}\Big)^{1/q}$$

та

$$\|x\|_{\mathcal{E}^\nu_q[\mathcal{C}^\alpha,\mathcal{C}^\beta]_\theta}=\Big(\sum_{k\in\mathbb{Z}_+}\nu^{-kq}\|x_k\|^q_{[\mathcal{C}^\alpha,\mathcal{C}^\beta]_\theta}\Big)^{1/q}$$

відповідно.

При $\operatorname{Re}\alpha<0$ $\mathcal{C}^\alpha=X$ і простір $\mathcal{E}^\nu_\infty(X)$ складається з векторів експоненціального типу ν оператора A, введених в роботі [6]. Тому елементи з $\mathcal{E}^\nu_q(\mathcal{C}^\alpha)$ розширюють клас просторів векторів такого типу.

Лема 1.1. *Простори $\mathcal{E}^\nu_q(\mathcal{C}^\alpha)$ банахові.*

Доведення. Нехай (y_n) — послідовність Коші в $\mathcal{E}^\nu_q(\mathcal{C}^\alpha)$, тоді такими ж є послідовності (y_n) та (A^ky_n) для будь-якого $k\in\mathbb{Z}_+$ в $\mathcal{C}^\alpha$ внаслідок неперервності вкладення $\mathcal{E}^\nu_q(\mathcal{C}^\alpha)\subset\mathcal{C}^\alpha$. Оператор A, як позитивний, має непорожню резольвентну множину. Тому, згідно з [3], $\mathcal{C}^\infty$ — щільний в X і, як наслідок, щільний в $\mathcal{C}^\alpha$. В силу [8, теорема VII.9.7] оператори A^k — замкнені над $\mathcal{C}^\alpha$. Із замкненості A^k та повноти $\mathcal{C}^\alpha$ випливає існування таких $x,y\in\mathcal{C}^\alpha$, що $y_n\to x$ і $A^ky_n\to y$ за нормою $\mathcal{C}^\alpha$ та $y=A^kx$ для будь-якого $k\in\mathbb{Z}_+$. Тому для будь-якого $\varepsilon>0$ існує таке $n_\varepsilon\in\mathbb{N}$, що $\nu^{-kq}\|A^ky_n\|^q_{\mathcal{C}^\alpha}\le 2^{q-1}\nu^{-kq}\|A^ky_{n_\varepsilon}\|^q_{\mathcal{C}^\alpha}+\varepsilon/2^{k+1}$ для всіх $n\ge n_\varepsilon$ та $k\in\mathbb{Z}_+$. Переходячи до границі при $n\to\infty$, отримуємо $\nu^{-kq}\|A^kx\|^q_{\mathcal{C}^\alpha}\le 2^{q-1}\nu^{-kq}\|A^ky_{n_\varepsilon}\|^q_{\mathcal{C}^\alpha}+\varepsilon/2^{k+1}$ при $n\ge n_\varepsilon$. Отже, $\|x\|^q_{\mathcal{E}^\nu_q(\mathcal{C}^\alpha)}\le 2^{q-1}\|y_{n_\varepsilon}\|^q_{\mathcal{E}^\nu_q(\mathcal{C}^\alpha)}+\varepsilon$, і тому $x\in\mathcal{E}^\nu_q(\mathcal{C}^\alpha)$ та $y_n\to x$ за нормою $\mathcal{E}^\nu_q(\mathcal{C}^\alpha)$, що і доводить повноту простору $\mathcal{E}^\nu_q(\mathcal{C}^\alpha)$. □

Зазначимо, що при $\nu\le\mu$ маємо неперервні вкладення $\mathcal{E}^\nu_q(\mathcal{C}^\alpha)\subset\mathcal{E}^\mu_q(\mathcal{C}^\alpha)\subset\mathcal{C}^\alpha$.

Лема 1.2. *Якщо $0<\nu_0,\nu_1<\infty$, $(\nu_0\ne\nu_1)$, $\alpha,\beta\in\mathbb{C}$ і $1\le q,q_0,q_1\le\infty$, то при $\nu=\nu_0^{1-\theta}\nu_1^\theta$*

$$\left(\mathcal{E}^{\nu_0}_{q_0}(\mathcal{C}^\alpha),\,\mathcal{E}^{\nu_1}_{q_1}(\mathcal{C}^\alpha)\right)_{\theta,q}=\mathcal{E}^\nu_q(\mathcal{C}^\alpha), \tag{1}$$

а при $1\le q_0,q_1<\infty$, таких що $1/q=(1-\theta)/q_0+\theta/q_1$

$$\left(\mathcal{E}^\nu_{q_0}(\mathcal{C}^\alpha),\,\mathcal{E}^\nu_{q_1}(\mathcal{C}^\beta)\right)_{\theta,q}=\mathcal{E}^\nu_q(\mathcal{C}^\alpha,\mathcal{C}^\beta)_{\theta,q}, \tag{2}$$

$$\left[\mathcal{E}^{\nu_0}_{q_0}(\mathcal{C}^\alpha),\,\mathcal{E}^{\nu_1}_{q_1}(\mathcal{C}^\alpha)\right]_\theta=\mathcal{E}^\nu_q(\mathcal{C}^\alpha), \tag{3}$$

$$\left[\mathcal{E}^\nu_{q_0}(\mathcal{C}^\alpha),\,\mathcal{E}^\nu_{q_1}(\mathcal{C}^\beta)\right]_\theta=\mathcal{E}^\nu_q[\mathcal{C}^\alpha,\,\mathcal{C}^\beta]_\theta. \tag{4}$$

Простори $\mathcal{E}^\nu_q(\mathcal{C}^\alpha,\mathcal{C}^\beta)_{\theta,q}$, $\mathcal{E}^\nu_q[\mathcal{C}^\alpha,\,\mathcal{C}^\beta]_\theta$ — банахові.

Доведення. Простір $\mathcal{E}_q^\nu(\mathcal{C}^\alpha)$ — ізометричний простору послідовностей вигляду $l_q^{\nu,\alpha} = \{\bar{x} := (x_k)_{k\in\mathbb{Z}_+} : x \in \mathcal{E}_q^\nu(\mathcal{C}^\alpha)\}$ з нормою $\|\bar{x}\|_{l_q^{\nu,\alpha}} = \|x\|_{\mathcal{E}_q^\nu(\mathcal{C}^\alpha)}$. Зробимо заміну $\nu = 2^{-\sigma}$, при якій умова $\nu = \nu_0^{1-\theta}\nu_1^\theta$ переходить у рівність $\sigma = (1-\theta)\sigma_0 + \theta\sigma_1$, і використаємо теорему 1.18.2 з [10]. При цьому $\mathcal{K}(t,\bar{x}, l_\infty^{\nu_0,\alpha}, l_\infty^{\nu_1,\alpha}) \sim \sup_{k\in\mathbb{Z}_+}\min(2^{k\sigma_0}, t2^{k\sigma_1})\|x_k\|_{\mathcal{C}^\alpha}$ для $q_0 = q_1 = \infty$ та $\mathcal{K}(t,\bar{x}, l_1^{\nu_0,\alpha}, l_1^{\nu_1,\alpha}) \sim \sum_{k\in\mathbb{N}}\min(2^{k\sigma_0}, t2^{k\sigma_1})\|x_k\|_{\mathcal{C}^\alpha}$ для $q_0 = q_1 = 1$. Нехай $\bar{x} \in (l_\infty^{\nu_0,\alpha}, l_\infty^{\nu_1,\alpha})_{\theta,q}$ і без обмеження загальності $\sigma_0 > \sigma_1$. Підставляючи вирази для $\mathcal{K}$ у формули для норм, з точністю до деякої сталої $c > 0$ отримуємо

$$\|\bar{x}\|^q_{(l_\infty^{\nu_0,\alpha}, l_\infty^{\nu_1,\alpha})_{\theta,q}} \sim \sum_{j\in\mathbb{Z}} 2^{-\theta qj(\sigma_0-\sigma_1)} \sup_k \left[\min(2^{k\sigma_0}, 2^{j(\sigma_0-\sigma_1)+k\sigma_1})\|x_k\|_{\mathcal{C}^\alpha}\right]^q \geq$$

$$\sum_{j\in\mathbb{Z}} 2^{qj[\sigma_0(1-\theta)+\sigma_1\theta]}\|x_j\|^q_{\mathcal{C}^\alpha} = c\|\bar{x}\|^q_{l_q^{\nu,\alpha}}.$$

Отже, справедливим є неперервне вкладення $(l_\infty^{\nu_0,\alpha}, l_\infty^{\nu_1,\alpha})_{\theta,q} \subset l_q^{\nu,\alpha}$. Якщо $\bar{x} \in l_q^{\nu,\alpha}$, то з використанням нерівності Гельдера

$$\|\bar{x}\|^q_{(l_1^{\nu_0,\alpha}, l_1^{\nu_1,\alpha})_{\theta,q}} \sim \sum_{j\in\mathbb{Z}} 2^{-\theta qj(\sigma_0-\sigma_1)}\Big[\sum_{k\in\mathbb{Z}_+}\min(2^{k\sigma_0}, 2^{j(\sigma_0-\sigma_1)+k\sigma_1})\|x_k\|_{\mathcal{C}^\alpha}\Big]^q \leq$$

$$c\sum_{k\in\mathbb{Z}} 2^{k\sigma q}\|x_k\|^q_{\mathcal{C}^\alpha} = c\|\bar{x}\|^q_{l_q^{\nu,\alpha}}$$

для деякої $c > 0$. Тому справедливим буде неперервне вкладення $l_q^{\nu,\alpha} \subset (l_1^{\nu_0,\alpha}, l_1^{\nu_1,\alpha})_{\theta,q}$. З властивостей інтерполяційних просторів отримуємо $(l_1^{\nu_0,\alpha}, l_1^{\nu_1,\alpha})_{\theta,q} \subset \big(l_{q_0}^{\nu_0,\alpha}, l_{q_1}^{\nu_1,\alpha}\big)_{\theta,q} \subset (l_\infty^{\nu_0,\alpha}, l_\infty^{\nu_1,\alpha})_{\theta,q}$ при $1 \leq q, q_0, q_1 \leq \infty$. В результаті маємо $l_q^{\nu,\alpha} \subset \big(l_{q_0}^{\nu_0,\alpha}, l_{q_1}^{\nu_1,\alpha}\big)_{\theta,q} \subset l_q^{\nu,\alpha}$, і рівність (1) доведена.

Простір $\mathcal{E}_q^\nu(\mathcal{C}^\alpha)$ ізометрично вкадений в простір послідовностей $l_q^\alpha = \big\{(\xi_k) : \xi_k \in \mathcal{C}^\alpha,\ \|(\xi_k)\|_{l_q^\alpha} = \big(\sum_{k\in\mathbb{Z}_+}\|\xi_k\|^q_{\mathcal{C}^\alpha}\big)^{1/q} < \infty\big\}$. Відповідну ізометрію позначимо $I\colon \mathcal{E}_q^\nu(\mathcal{C}^\alpha) \ni x \hookrightarrow (\xi_k := \nu^{-k}x_k) \in l_q^\alpha$. K-функціонал інтерполяційного простору $\big(l_{q_0}^\alpha, l_{q_1}^\beta\big)_{\theta,q}$ допускає оцінку

$$K(t, I(x), l_{q_0}^\alpha, l_{q_1}^\beta) \leq \inf_{x=x_0+x_1}\big(\|I(x_0)\|_{l_{q_0}^\alpha} + t\|I(x_1)\|_{l_{q_1}^\beta}\big) \leq$$

$$\|I\|_{\mathcal{E}_{q_0}^\nu(\mathcal{C}^\alpha)\to l_{q_0}^\alpha} K\left(\frac{t\|I\|_{\mathcal{E}_{q_1}^\nu(\mathcal{C}^\beta)\to l_{q_1}^\beta}}{\|I\|_{\mathcal{E}_{q_0}^\nu(\mathcal{C}^\alpha)\to l_{q_0}^\alpha}}, x, \mathcal{E}_{q_0}^\nu(\mathcal{C}^\alpha), \mathcal{E}_{q_1}^\nu(\mathcal{C}^\beta)\right).$$

Зробивши заміну $\tau = t\|I\|_{\mathcal{E}_{q_1}^\nu(\mathcal{C}^\beta)\to l_{q_1}^\beta}\|I\|^{-1}_{\mathcal{E}_{q_1}^\nu(\mathcal{C}^\alpha)\to l_{q_0}^\alpha}$, отримаємо

$$\|I(x)\|_{(l_{q_0}^\alpha, l_{q_1}^\beta)_{\theta,q}} \leq \|I\|_{\mathcal{E}_{q_0}^\nu(\mathcal{C}^\alpha)\to l_{q_0}^\alpha}\frac{\|I\|^\theta_{\mathcal{E}_{q_1}^\nu(\mathcal{C}^\beta)\to l_{q_1}^\beta}}{\|I\|^\theta_{\mathcal{E}_{q_0}^\nu(\mathcal{C}^\alpha)\to l_{q_0}^\alpha}}\|x\|_{(\mathcal{E}_{q_0}^\nu(\mathcal{C}^\alpha), \mathcal{E}_{q_1}^\nu(\mathcal{C}^\beta))_{\theta,q}}.$$

Застосувавши подібні оцінки для оберненого відображення I^{-1}, визначеного на множині значень оператора I, отримуємо

$$\|I(x)\|_{(l_{q_0}^\alpha, l_{q_1}^\beta)_{\theta,q}} = \|x\|_{(\mathcal{E}_{q_0}^\nu(\mathcal{C}^\alpha), \mathcal{E}_{q_1}^\nu(\mathcal{C}^\beta))_{\theta,q}} \quad \text{для всіх} \quad x \in \big(\mathcal{E}_{q_0}^\nu(\mathcal{C}^\alpha), \mathcal{E}_{q_1}^\nu(\mathcal{C}^\beta)\big)_{\theta,q}.$$

Згідно з означенням простір $\mathcal{E}_q^\nu(\mathcal{C}^\alpha, \mathcal{C}^\beta)_{\theta,q}$ — ізометричний простору послідовностей $l_{q,\theta}^{\nu,(\alpha,\beta)} = \{\bar{x} := (x_k)_{k\in\mathbb{Z}_+} : x \in \mathcal{E}_q^\nu(\mathcal{C}^\alpha, \mathcal{C}^\beta)_{\theta,q}\}$ з нормою $\|\bar{x}\|_{l_{q,\theta}^{\nu,(\alpha,\beta)}} = \|x\|_{\mathcal{E}_q^\nu(\mathcal{C}^\alpha,\mathcal{C}^\beta)_{\theta,q}}$. Застосовуючи тепер відомий топологічний ізоморфізм банахових просторів $\big(l_{q_0}^\alpha, l_{q_1}^\beta\big)_{\theta,q} = l_{q,\theta}^{(\alpha,\beta)}$, де $l_{q,\theta}^{(\alpha,\beta)} = \big\{(\xi_k) : \xi_k \in (\mathcal{C}^\alpha, \mathcal{C}^\beta)_{\theta,q},\ \|(\xi_k)\|_{l_{q,\theta}^{(\alpha,\beta)}} = \big(\sum_{k\in\mathbb{Z}_+}\|\xi_k\|^q_{(\mathcal{C}^\alpha,\mathcal{C}^\beta)_{\theta,q}}\big)^{1/q} < \infty\big\}$, $1/q = (1-\theta)/q_0 + \theta/q_1$ [10, теорема 1.18.1], приходимо до рівності (2).

Рівність (3) безпосередньо випливає з (1) і теореми 4.7.2 з [7].

Нехай $x \in [\mathcal{E}_{q_0}^\nu(\mathcal{C}^\alpha), \mathcal{E}_{q_1}^\nu(\mathcal{C}^\beta)]_\theta$, $f(z) \in \mathcal{F}(\mathcal{E}_{q_0}^\nu(\mathcal{C}^\alpha), \mathcal{E}_{q_1}^\nu(\mathcal{C}^\beta))$ і $f(\theta) = x$. Тоді

$$g(z) = \left(\frac{\|I\|_{\mathcal{E}_{q_0}^\nu(\mathcal{C}^\alpha)\to l_{q_0}^\alpha}}{\|I\|_{\mathcal{E}_{q_1}^\nu(\mathcal{C}^\beta)\to l_{q_1}^\beta}}\right)^{z-\theta} If(z) \in \mathcal{F}(l_{q_0}^\alpha, l_{q_1}^\beta),\ g(\theta) = Ix.$$

Звідси маємо

$$\|g(z)\|_{\mathcal{F}(l_{q_0}^\alpha, l_{q_1}^\beta)} \leq \|I\|^{(1-\theta)}_{\mathcal{E}_{q_0}^\nu(\mathcal{C}^\alpha)\to l_{q_0}^\alpha}\|I\|^\theta_{\mathcal{E}_{q_1}^\nu(\mathcal{C}^\beta)\to l_{q_1}^\beta}\|f(z)\|_{\mathcal{F}(\mathcal{E}_{q_0}^\nu(\mathcal{C}^\alpha), \mathcal{E}_{q_1}^\nu(\mathcal{C}^\beta))}$$

$$\|Ix\|_{[l_{q_0}^\alpha, l_{q_1}^\beta]_\theta} \leq \|I\|^{(1-\theta)}_{\mathcal{E}_{q_0}^\nu(\mathcal{C}^\alpha)\to l_{q_0}^\alpha}\|I\|^\theta_{\mathcal{E}_{q_1}^\nu(\mathcal{C}^\beta)\to l_{q_1}^\beta}\|x\|_{[\mathcal{E}_{q_0}^\nu(\mathcal{C}^\alpha), \mathcal{E}_{q_1}^\nu(\mathcal{C}^\beta)]_\theta}.$$

Застосовуючи подібні оцінки для оберненого відображення I^{-1}, отримуємо

$$\|I(x)\|_{[l_{q_0}^\alpha, l_{q_1}^\beta]_\theta} = \|x\|_{[\mathcal{E}_{q_0}^\nu(\mathcal{C}^\alpha), \mathcal{E}_{q_1}^\nu(\mathcal{C}^\beta)]_\theta} \quad \text{для всіх} \quad x \in [\mathcal{E}_{q_0}^\nu(\mathcal{C}^\alpha), \mathcal{E}_{q_1}^\nu(\mathcal{C}^\beta)]_\theta.$$

За означенням простір $\mathcal{E}_q^\nu[\mathcal{C}^\alpha, \mathcal{C}^\beta]_\theta$ — ізометричний простору послідовностей $l_{q,\theta}^{\nu,[\alpha,\beta]} = \{\bar{x} := (x_k)_{k\in\mathbb{Z}_+} : x \in \mathcal{E}_q^\nu[\mathcal{C}^\alpha, \mathcal{C}^\beta]_\theta\}$ з нормою $\|\bar{x}\|_{l_{q,\theta}^{\nu,[\alpha,\beta]}} = \|x\|_{\mathcal{E}_q^\nu[\mathcal{C}^\alpha,\mathcal{C}^\beta]_\theta}$. Тому рівність (4) випливає з відомого топологічного ізоморфізму $\big[l_{q_0}^\alpha, l_{q_1}^\beta\big]_\theta = l_{q,\theta}^{[\alpha,\beta]}$, де $l_{q,\theta}^{[\alpha,\beta]} = \big\{(\xi_k) : \xi_k \in [\mathcal{C}^\alpha, \mathcal{C}^\beta]_\theta,\ \|(\xi_k)\|_{l_{q,\theta}^{[\alpha,\beta]}} = \big(\sum_{k\in\mathbb{Z}_+}\|\xi_k\|^q_{[\mathcal{C}^\alpha,\mathcal{C}^\beta]_\theta}\big)^{1/q} < \infty\big\}$, $1/q = (1-\theta)/q_0 + \theta/q_1$ [10, теорема 1.18.1].

Простори $\mathcal{E}_q^\nu(\mathcal{C}^\alpha, \mathcal{C}^\beta)_{\theta,q}$, $\mathcal{E}_q^\nu[\mathcal{C}^\alpha, \mathcal{C}^\beta]_\theta$ — банахові, оскільки, згідно з (1) і (2), є інтерполяційними просторами між $\mathcal{E}_{q_0}^\nu(\mathcal{C}^\alpha)$ і $\mathcal{E}_{q_1}^\nu(\mathcal{C}^\beta)$. □

2 Апроксимаційні простори

Нехай $0 < \nu, \mu < \infty$, $1 \leq q \leq \infty$, $0 < \tau \leq \infty$. Визначимо апроксимаційні простори вигляду

$$\mathcal{E}_{q,\tau}^{\nu,\mu}(\mathcal{C}^\alpha) = \Big\{x \in \mathcal{C}^\alpha : \|x\|_{\mathcal{E}_{q,\tau}^{\nu,\mu}(\mathcal{C}^\alpha)} = \Big(\int_0^\infty t^{\mu\tau}E(t,x)^\tau\frac{dt}{t}\Big)^{1/\tau} < \infty\Big\},$$

$$\mathcal{E}_{q,\infty}^{\nu,\mu}(\mathcal{C}^\alpha) = \Big\{x \in \mathcal{C}^\alpha : \|x\|_{\mathcal{E}_{q,\infty}^{\nu,\mu}(\mathcal{C}^\alpha)} = \sup_{t>0} t^\mu E(t,x) < \infty\Big\},$$

де $E(t,x) = \inf_{\|y\|_{\mathcal{E}_q^\nu(\mathcal{C}^\alpha)}\leq t}\|x-y\|_{\mathcal{C}^\alpha}$, $y \in \mathcal{E}_q^\nu(\mathcal{C}^\alpha)$, $0 < t < \infty$.

Нехай $\big[\mathcal{E}_{q,\tau}^{\nu,\mu}(\mathcal{C}^\alpha)\big]^\theta$, $0 < \theta < 1$ — простір $\mathcal{E}_{q,\tau}^{\nu,\mu}(\mathcal{C}^\alpha)$ з квазінормою $\|x\|^\theta_{\mathcal{E}_{q,\tau}^{\nu,\mu}(\mathcal{C}^\alpha)}$. Згідно з теоремою 7.1.7 [7], при $\theta = 1/(\mu+1)$ і $\tau = \theta r$ $(0 < r \leq \infty)$ справедлива рівність

$$\big[\mathcal{E}_{q,\tau}^{\nu,\mu}(\mathcal{C}^\alpha)\big]^\theta = \big(\mathcal{E}_q^\nu(\mathcal{C}^\alpha), \mathcal{C}^\alpha\big)_{\theta,r}. \tag{5}$$

Таким чином, $\mathcal{E}^{\nu,\mu}_{q,\tau}(\mathcal{C}^\alpha)$ можна розглядати як інтерполяційний простір між $\mathcal{E}^{\nu}_{q}(\mathcal{C}^\alpha)$ і $\mathcal{C}^\alpha$. З рівності (5) та повноти просторів $\mathcal{E}^{\nu}_{q}(\mathcal{C}^\alpha)$ випливає, що простори $\mathcal{E}^{\nu,\mu}_{q,\tau}(\mathcal{C}^\alpha)$ — квазібанахові.

Теорема 1. *Існують такі додатні числа* $c_1 = c_1(\theta,\tau)$, $c_2 = c_2(\theta,\tau)$, *що виконуються нерівності*

$$E(t,x) \le c_1 t^{-\mu} \|x\|_{\mathcal{E}^{\nu,\mu}_{q,\tau}(\mathcal{C}^\alpha)}, \quad x \in \mathcal{E}^{\nu,\mu}_{q,\tau}(\mathcal{C}^\alpha), \tag{6}$$

$$\|x\|_{\mathcal{E}^{\nu,\mu}_{q,\tau}(\mathcal{C}^\alpha)} \le c_2 \|x\|^{\mu}_{\mathcal{E}^{\nu}_{q}(\mathcal{C}^\alpha)} \|x\|_{\mathcal{C}^\alpha}, \quad x \in \mathcal{E}^{\nu}_{q}(\mathcal{C}^\alpha). \tag{7}$$

Доведення. Згідно з теоремою 3.11.4(b) [7], для деякого додатного числа c маємо

$$\|x\|_{\left(\mathcal{E}^{\nu}_{q}(\mathcal{C}^\alpha),\mathcal{C}^\alpha\right)_{\theta,r}} \le c\,\|x\|^{1-\theta}_{\mathcal{E}^{\nu}_{q}(\mathcal{C}^\alpha)} \|x\|^{\theta}_{\mathcal{C}^\alpha}, \quad x \in \mathcal{E}^{\nu}_{q}(\mathcal{C}^\alpha).$$

Звідси і з рівності (5) при $\mu = (1-\theta)/\theta$ випливає існування такої сталої $c_1 > 0$, що виконується нерівність (7). Згідно з теоремою 3.11.4(a) [7], для деякого числа $c > 0$ маємо $\mathcal{K}(t,x;\mathcal{E}^{\nu}_{q}(\mathcal{C}^\alpha),\mathcal{C}^\alpha) \le ct^{\theta}\|x\|_{\left(\mathcal{E}^{\nu}_{q}(\mathcal{C}^\alpha),\mathcal{C}^\alpha\right)_{\theta,r}}$, $x \in \left(\mathcal{E}^{\nu}_{q}(\mathcal{C}^\alpha),\mathcal{C}^\alpha\right)_{\theta,r}$. З цієї нерівності та (5) випливає існування такої сталої $c_0 > 0$, що $\mathcal{K}(t,x;\mathcal{E}^{\nu}_{q}(\mathcal{C}^\alpha),\mathcal{C}^\alpha) \le c_0 t^{\theta}\|x\|^{\theta}_{\mathcal{E}^{\nu,\mu}_{q,\tau}(\mathcal{C}^\alpha)}$, $x \in \mathcal{E}^{\nu,\mu}_{q,\tau}(\mathcal{C}^\alpha)$. Покладемо $\mathcal{K}_\infty(t,x;\mathcal{E}^{\nu}_{q}(\mathcal{C}^\alpha),\mathcal{C}^\alpha) = \inf\limits_{x=x_0+x_1} \max\left\{\|x_0\|_{\mathcal{E}^{\nu}_{q}(\mathcal{C}^\alpha)}, t\|x_1\|_{\mathcal{C}^\alpha}\right\}$. Оскільки $\mathcal{K}_\infty \le \mathcal{K}$, то

$$\mathcal{K}_\infty(t,x;\mathcal{E}^{\nu}_{q}(\mathcal{C}^\alpha),\mathcal{C}^\alpha) \le c_0 t^{\theta}\|x\|^{\theta}_{\mathcal{E}^{\nu,\mu}_{q,\tau}(\mathcal{C}^\alpha)}, \quad x \in \mathcal{E}^{\nu,\mu}_{q,\tau}(\mathcal{C}^\alpha). \tag{8}$$

Згідно з лемою 7.1.2 [7], для кожного $t > 0$ існує таке $s > 0$, що $\mathcal{K}_\infty(t,x;\mathcal{E}^{\nu}_{q}(\mathcal{C}^\alpha),\mathcal{C}^\alpha) = s$ і $E(s+0,x) \le s/t \le E(s-0,x)$. Звідси та (8) маємо $s^{1-\theta}E^{\theta}(s,x) \le c_0^{1/\theta}\|x\|^{\theta}_{\mathcal{E}^{\nu,\mu}_{q,\tau}(\mathcal{C}^\alpha)}$, $x \in \mathcal{E}^{\nu,\mu}_{q,\tau}(\mathcal{C}^\alpha)$. При $\mu = (1-\theta)/\theta$ отримуємо $s^{\mu}E(s,x) \le c_0^{1/\theta}\|x\|_{\mathcal{E}^{\nu,\mu}_{q,\tau}(\mathcal{C}^\alpha)}$, $x \in \mathcal{E}^{\nu,\mu}_{q,\tau}(\mathcal{C}^\alpha)$. Поклавши $c_1 = c_0^{1/\theta}$, приходимо до (6). □

Встановлені нерівності (6) та (7) можна розглядати як узагальнення відомих нерівностей Джексона і Бернштейна. Зокрема, нерівність (6) дає оцінку відстані від вектора $x \in \mathcal{C}^\alpha$ до підпростору $\mathcal{E}^{\nu}_{q}(\mathcal{C}^\alpha)$.

Теорема 2. *Нехай* $0 < \mu_0, \mu_1 < \infty$, $1 \le q \le \infty$, $0 < \tau, \tau_0, \tau_1 \le \infty$. *Для* $\mu = (1-\theta)\mu_0 + \theta\mu_1$ *і* $\mu_0 \ne \mu_1$ *виконується рівність*

$$\left(\mathcal{E}^{\nu,\mu_0}_{q,\tau_0}(\mathcal{C}^\alpha), \mathcal{E}^{\nu,\mu_1}_{q,\tau_1}(\mathcal{C}^\alpha)\right)_{\theta,\tau} = \mathcal{E}^{\nu,\mu}_{q,\tau}(\mathcal{C}^\alpha). \tag{9}$$

При $0 < \tau \le \tilde{\tau} \le \infty$ *справедливими будуть вкладення*

$$\mathcal{E}^{\nu,\mu}_{q,\tau}(A) \subset \mathcal{E}^{\nu,\mu}_{q,\tilde{\tau}}(A). \tag{10}$$

Крім цього, якщо $\mathcal{E}^{\nu,\mu_0}_{q,\tau_0}(\mathcal{C}^\alpha) \subset \mathcal{E}^{\nu,\mu_1}_{q,\tau_1}(\mathcal{C}^\alpha)$ *і* $0 < \theta_0 < \theta_1 < 1$, *то*

$$\left(\mathcal{E}^{\nu,\mu_0}_{q,\tau_0}(\mathcal{C}^\alpha), \mathcal{E}^{\nu,\mu_1}_{q,\tau_1}(\mathcal{C}^\alpha)\right)_{\theta_0,\tau} \subset \left(\mathcal{E}^{\nu,\mu_0}_{q,\tau_0}(\mathcal{C}^\alpha), \mathcal{E}^{\nu,\mu_1}_{q,\tau_1}(\mathcal{C}^\alpha)\right)_{\theta_1,\tilde{\tau}}. \tag{11}$$

Доведення. Згідно з теоремою про реітерацію [7, теорема 3.11.5], при $\theta = (1-\lambda)\theta_0 + \lambda\theta_1$, $\theta_0 = 1/(\mu_0+1)$, $\theta_1 = 1/(\mu_1+1)$ і $\tau = \theta r$ маємо

$$\left(\left[\mathcal{E}^{\nu,\mu_0}_{q,\tau_0}(\mathcal{C}^\alpha)\right]^{\theta_0},\ \left[\mathcal{E}^{\nu,\mu_1}_{q,\tau_1}(\mathcal{C}^\alpha)\right]^{\theta_1}\right)_{\lambda,\tau} = \left[\mathcal{E}^{\nu,\mu}_{q,r}(\mathcal{C}^\alpha)\right]^{\theta}. \tag{12}$$

Застосовуючи теорему про степені [7, теорема 3.11.6], отримуємо

$$\left(\left[\mathcal{E}^{\nu,\mu_0}_{q,\tau_0}(\mathcal{C}^\alpha)\right]^{\theta_0},\ \left[\mathcal{E}^{\nu,\mu_1}_{q,\tau_1}(\mathcal{C}^\alpha)\right]^{\theta_1}\right)_{\lambda,\tau} = \left(\mathcal{E}^{\nu,\mu_0}_{q,\tau_0}(\mathcal{C}^\alpha),\ \mathcal{E}^{\nu,\mu_1}_{q,\tau_1}(\mathcal{C}^\alpha)\right)^{\theta}_{\rho,r}, \tag{13}$$

де $\rho = \lambda\theta_1/\theta$. З (12) і (13) при $\mu = (1-\rho)\mu_0 + \rho\mu_1$ маємо $\left(\mathcal{E}^{\nu,\mu_0}_{q,\tau_0}(\mathcal{C}^\alpha),\ \mathcal{E}^{\nu,\mu_1}_{q,\tau_1}(\mathcal{C}^\alpha)\right)_{\rho,r} = \mathcal{E}^{\nu,\mu}_{q,r}(\mathcal{C}^\alpha)$, звідки приходимо до (9).

При $0 < \tau \le \tilde{\tau} < \infty$

$$\|x\|_{\left(\mathcal{E}^{\nu,\mu_0}_{q,\tau_0}(\mathcal{C}^\alpha),\mathcal{E}^{\nu,\mu_1}_{q,\tau_1}(\mathcal{C}^\alpha)\right)_{\theta,\tilde{\tau}}} \le \left(\int_0^\infty \left(t^{-\theta}\mathcal{K}(t,x;\mathcal{E}^{\nu,\mu_0}_{q,\tau_0}(\mathcal{C}^\alpha),\mathcal{E}^{\nu,\mu_1}_{q,\tau_1}(\mathcal{C}^\alpha)\right)^{\tau}\frac{dt}{t}\right)^{1/\tilde{\tau}} \times$$
$$\left(\sup_{t>0} t^{-\theta}\mathcal{K}(t,x;\mathcal{E}^{\nu,\mu_0}_{q,\tau_0}(\mathcal{C}^\alpha),\mathcal{E}^{\nu,\mu_1}_{q,\tau_1}(\mathcal{C}^\alpha))\right)^{(1-\tau/\tilde{\tau})} \le c\,\|x\|_{\left(\mathcal{E}^{\nu,\mu_0}_{q,\tau_0}(\mathcal{C}^\alpha),\mathcal{E}^{\nu,\mu_1}_{q,\tau_1}(\mathcal{C}^\alpha)\right)_{\theta,\tau}},$$

звідки отримуємо (10). Вкладення $\mathcal{E}^{\nu,\mu}_{q,\tau}(A) \subset \mathcal{E}^{\nu,\mu}_{q,\infty}(A)$ безпосередньо випливає із нерівності $\mathcal{K}(t,x;\mathcal{E}^{\nu,\mu_0}_{q,\tau_0}(\mathcal{C}^\alpha),\mathcal{E}^{\nu,\mu_1}_{q,\tau_1}(\mathcal{C}^\alpha)) \le c_1 t^{\theta}\|x\|_{\mathcal{E}^{\nu,\mu}_{q,\tau}(\mathcal{C}^\alpha)}$, $x \in \mathcal{E}^{\nu,\mu}_{q,\tau}(\mathcal{C}^\alpha)$.

Із нерівності $\mathcal{K}(t,x;\mathcal{E}^{\nu,\mu_0}_{q,\tau_0}(\mathcal{C}^\alpha),\mathcal{E}^{\nu,\mu_1}_{q,\tau_1}(\mathcal{C}^\alpha)) \le t\,\|x\|_{\mathcal{E}^{\nu,\mu_1}_{q,\tau_1}(\mathcal{C}^\alpha)}$, $x \in \mathcal{E}^{\nu,\mu_1}_{q,\tau_1}(\mathcal{C}^\alpha)$, маємо

$$\|x\|_{\left(\mathcal{E}^{\nu,\mu_0}_{q,\tau_0}(\mathcal{C}^\alpha),\mathcal{E}^{\nu,\mu_1}_{q,\tau_1}(\mathcal{C}^\alpha)\right)_{\theta_1,1}} = \int_0^1 t^{-\theta_1}\mathcal{K}(t,x;\mathcal{E}^{\nu,\mu_0}_{q,\tau_0}(\mathcal{C}^\alpha),\mathcal{E}^{\nu,\mu_1}_{q,\tau_1}(\mathcal{C}^\alpha))\frac{dt}{t} +$$
$$\int_1^\infty t^{-\theta_1}\mathcal{K}(t,x;\mathcal{E}^{\nu,\mu_0}_{q,\tau_0}(\mathcal{C}^\alpha),\mathcal{E}^{\nu,\mu_1}_{q,\tau_1}(\mathcal{C}^\alpha))\frac{dt}{t} \le c\,\|x\|_{\mathcal{E}^{\nu,\mu_1}_{q,\tau_1}(\mathcal{C}^\alpha)} +$$
$$\sup_{t>0} t^{-\theta_0}\mathcal{K}(t,x;\mathcal{E}^{\nu,\mu_0}_{q,\tau_0}(\mathcal{C}^\alpha),\mathcal{E}^{\nu,\mu_1}_{q,\tau_1}(\mathcal{C}^\alpha)) \int_1^\infty z^{-(\theta_1-\theta_0)}\frac{dz}{z} \le$$
$$c_1\,\|x\|_{\left(\mathcal{E}^{\nu,\mu_0}_{q,\tau_0}(\mathcal{C}^\alpha),\mathcal{E}^{\nu,\mu_1}_{q,\tau_1}(\mathcal{C}^\alpha)\right)_{\theta_0,\infty}},$$

звідки випливає вкладення $\left(\mathcal{E}^{\nu,\mu_0}_{q,\tau_0}(\mathcal{C}^\alpha),\mathcal{E}^{\nu,\mu_1}_{q,\tau_1}(\mathcal{C}^\alpha)\right)_{\theta_0,\infty} \subset \left(\mathcal{E}^{\nu,\mu_0}_{q,\tau_0}(\mathcal{C}^\alpha),\mathcal{E}^{\nu,\mu_1}_{q,\tau_1}(\mathcal{C}^\alpha)\right)_{\theta_1,1}$. Звідси і з (10) отримуємо (11). □

Нехай $0 < \theta < 1$, $0 \le \operatorname{Re}\alpha < \operatorname{Re}\beta < \infty$, $1 \le q \le \infty$ і простір Y співпадає з одним з просторів $\mathcal{C}^\alpha$, $(\mathcal{C}^\alpha,\mathcal{C}^\beta)_{\theta,q}$ або $[\mathcal{C}^\alpha,\mathcal{C}^\beta]_\theta$. Розглядаємо послідовність просторів $(\mathcal{E}^{\nu(n)}_{q}(Y))$, що відповідає неспадній послідовності додатних чисел $(\nu(n))_{n\in\mathbb{Z}_+}$ такій, що $\lim\limits_{n\to\infty}\nu(n) = \infty$ і визначимо простір абсолютно збіжних рядів за нормою Y вигляду

$$l[\mathcal{E}^{\nu(n)}_{q}(Y),Y] = \left\{\sum\nolimits_{n\in\mathbb{Z}_+} y_n = y \in Y : y_n \in \mathcal{E}^{\nu(n)}_{q}(Y)\right\}$$

з нормою $\|y\|_{l[\mathcal{E}^{\nu(n)}_{q}(Y),Y]} = \inf\limits_{y=\sum y_n} \sum_{n\in\mathbb{Z}_+}\|y_n\|_Y$, де інфімум беремо по всіх таких рядах. Далі позначаємо $\mathcal{E}_q(Y) := \bigcup_{\nu>0}\mathcal{E}^{\nu}_{q}(Y)$.

Теорема 3. *Справедливою буде топологічна рівність*

$$l\big[\mathcal{E}_q^{\nu(n)}(Y), Y\big] = \overline{\mathcal{E}_q(Y)}, \tag{14}$$

де замикання беремо за нормою простору Y.

Доведення. Розглянемо допоміжний простір абсолютно збіжних рядів $l_1 = \big\{\sum_{n\in\mathbb{Z}_+} y_n = y : y_n \in \mathcal{E}_q^{\nu(n)}(Y)\big\}$ з нормою $\|y\|_{l_1} = \inf\limits_{y=\sum y_n} \sum_{n\in\mathbb{Z}_+} \|y_n\|_{\mathcal{E}_q^{\nu(n)}(Y)}$, де інфімум беремо по всіх таких рядах. Розглянемо також простір формальних рядів $l_1[\mathcal{E}_q^{\nu(n)}(Y)] = \big\{\sum_{n\in\mathbb{Z}_+} y_n = \bar{y} : y_n \in \mathcal{E}_q^{\nu(n)}(Y)\big\}$ з нормою $\|\bar{y}\|_{l_1[\mathcal{E}_q^{\nu(n)}(Y)]} = \sum_{n\in\mathbb{Z}_+} \|y_n\|_{\mathcal{E}_q^{\nu(n)}(Y)}$. Він – банахів, бо його складові $\mathcal{E}_q^{\nu(n)}(Y)$ – банахові. З нерівності $\|y\|_{l_1} \le \|\bar{y}\|_{l_1[\mathcal{E}_q^{\nu(n)}(Y)]}$ випливає, що відображення

$$l_1[\mathcal{E}_q^{\nu(n)}(Y)] \ni \bar{y} \longmapsto y \in l_1$$

неперервне і l_1 є фактор-простором $l_1[\mathcal{E}_q^{\nu(n)}(Y)]$ по замкненому ядру, і тому є банаховим.

Для будь-якого $x \in \mathcal{E}_q^{\nu(n)}(Y)$ маємо $\|x\|_{l_1} \le \|x\|_{\mathcal{E}_q^{\nu(n)}(Y)}$. Враховуючи вкладення

$$\mathcal{E}_q^{\nu(n)}(Y) \subset \mathcal{E}_q^{\nu(n+1)}(Y),$$

в останній нерівності можемо перейти до границі $\|x\|_{l_1} \le \lim\limits_{n\to\infty} \|x\|_{\mathcal{E}_q^{\nu(n)}(Y)} = \|x\|_Y$. Для $\varepsilon > 0$ існує збіжний в Y ряд $\sum y_n^\varepsilon$ такий, що $\sum y_n^\varepsilon = y$ та $\|y\|_{l_1} - \varepsilon \le \sum_{n\in\mathbb{Z}_+} \|y_n^\varepsilon\|_{\mathcal{E}_q^{\nu(n)}(Y)} \le \sum_{n\in\mathbb{Z}_+} \|y_n^\varepsilon\|_Y$. З іншого боку, для будь-якого збіжного в Y ряду $\sum y_n = y$ маємо

$$\sum\nolimits_{n\in\mathbb{Z}_+} \|y_n\|_Y \le \sum\nolimits_{n\in\mathbb{Z}_+} \|y_n\|_{\mathcal{E}_q^{\nu(n)}(Y)}.$$

Звідки $\|y\|_{l[\mathcal{E}_q^{\nu(n)}(Y),Y]} \le \|y\|_{l_1} \le \sum_{n\in\mathbb{Z}_+} \|y_n^\varepsilon\|_Y + \varepsilon$, тобто $\|y\|_{l_1} = \|y\|_{l[\mathcal{E}_q^{\nu(n)}(Y),Y]}$. Отже, простір $l\big[\mathcal{E}_q^{\nu(n)}(Y), Y\big]$ — банахів.

Будь-який елемент замикання $y \in \overline{\mathcal{E}_q(Y)}$ може бути представлений збіжним за нормою Y рядом $y = \sum y_n$ таким, що $y_n \in \mathcal{E}_q^{\nu(n)}(Y)$, тому виконується алгебраїчна рівність $l\big[\mathcal{E}_q^{\nu(n)}(Y), Y\big] = \overline{\mathcal{E}_q(Y)}$. Очевидно, що $\|y\|_Y \le \sum_{n\in\mathbb{Z}_+} \|y_n\|_Y$ для будь-якого такого представлення, тому $\|y\|_Y \le \|y\|_{l[\mathcal{E}_q^{\nu(n)}(Y),Y]}$ для всіх $y \in \overline{\mathcal{E}_q(Y)}$ і рівність є топологічною. □

3 Приклад

Розглянемо у просторі $L_\rho(\Omega)$ $(1 < \rho < \infty)$ регулярно еліптичний оператор порядку $2l$

$$A : \mathcal{C}^1 \ni u \longmapsto \sum_{|\gamma|\le 2l} a_\gamma(t) D^\gamma u(t) \in L_\rho(\Omega), \quad a_\gamma \in C^\infty(\overline{\Omega}) \tag{15}$$

з областю визначення $\mathcal{C}^1 := \Big\{u \in W_\rho^{2l}(\Omega) : B_j u(t)_{|\partial\Omega} = 0;\ j = 1, \dots, l\Big\}$, де $W_\rho^{2l}(\Omega)$ — простір Соболєва і $B_j = \sum_{|\gamma|\le k_j} b_{j,\gamma}(t) D^\gamma$, $b_{j,\gamma}(t) \in C^\infty(\partial\Omega)$, $0 \le k_1 < k_2 < \ldots < k_l$, — набір граничних операторів. Надалі припускаємо, що резольвентна множина оператора A непорожня. Відомо [10, § 4.9.1], що у такому випадку для достатньо великих додатних

$\rho \ge \rho_0$ оператор $A + \rho I$ — позитивний. Оскільки простори векторів експоненціального типу операторів A і $A + \rho I$ співпадають [9], то без обмеження загальності вважаємо, що A — позитивний оператор. Згідно з [10, § 5.4.3], оператор A має дискретний спектр $\sigma(A) = \{\lambda_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, тобто $\lim\limits_{n\to\infty} |\lambda_n| = \infty$, і кореневі підпростори $\mathcal{R}_n$ кожного власного числа $\lambda_n \in \mathbb{C}$ є скінченновимірними. Далі Lin означає лінійну алгебраїчну оболонку векторів, і простір Y співпадає з одним із просторів $(\mathcal{C}^\alpha, \mathcal{C}^\beta)_{\theta,q}$ або $[\mathcal{C}^\alpha, \mathcal{C}^\beta]_\theta$ $(0 \le \operatorname{Re}\alpha < \operatorname{Re}\beta < \infty$, $1 \le q < \infty$, $0 < \theta < 1)$.

Теорема 4. *Нехай* $1 \le q_0, q_1 < \infty$, $1/q = (1-\theta)/q_0 + \theta/q_1$, $m_\kappa, n_\kappa \in \mathbb{N}$, $\kappa = 0, 1$, *і виконується умова щільності* $\overline{\mathcal{E}_q(Y)} = Y$. *Тоді*

$$Y = \Big\{\sum_{n\in\mathbb{Z}_+} u_n = u : u_n \in Lin\big\{\mathcal{R}_k : |\lambda_k| < \min\big(\nu(n)^{\frac{1}{m_\kappa+1}}, \nu(n)^{\frac{1}{n_\kappa+1}}\big)\big\}\Big\}, \tag{16}$$

де $\alpha = m_0(1-\theta) + n_0\theta$, $\beta = m_1(1-\theta) + n_1\theta$.

Доведення. Згідно з теоремою 1 [9], для $1 \le q < \infty$ і $m \in \mathbb{N}$, $\mathcal{E}_q^\nu(\mathcal{C}^m) = Lin\big\{\mathcal{R}_n : |\lambda_n|^{m+1} < \nu\big\}$. Застосовуючи лему 1.2, теорему 1.15.3 [10] та враховуючи скінченновимірність просторів $\mathcal{E}_q^\nu(\mathcal{C}^m)$, маємо

$$\mathcal{E}_q^\nu(\mathcal{C}^\alpha) = \big[\mathcal{E}_{q_0}^\nu(\mathcal{C}^{m_0}), \mathcal{E}_{q_1}^\nu(\mathcal{C}^{n_0})\big]_\theta = Lin\big\{\mathcal{R}_n : |\lambda_n| < \min\big(\nu^{\frac{1}{m_0+1}}, \nu^{\frac{1}{n_0+1}}\big)\big\}, \tag{17}$$

$$\mathcal{E}_q^\nu(\mathcal{C}^\beta) = \big[\mathcal{E}_{q_0}^\nu(\mathcal{C}^{m_1}), \mathcal{E}_{q_1}^\nu(\mathcal{C}^{n_1})\big]_\theta = Lin\big\{\mathcal{R}_n : |\lambda_n| < \min\big(\nu^{\frac{1}{m_1+1}}, \nu^{\frac{1}{n_1+1}}\big)\big\}, \tag{18}$$

де $\alpha = m_0(1-\theta) + n_0\theta$, $\beta = m_1(1-\theta) + n_1\theta$. Використовуючи знову лему 1.2, із врахуванням рівностей (17) та (18), отримуємо

$$\mathcal{E}_q^\nu(Y) = Lin\big\{\mathcal{R}_n : |\lambda_n| < \min\big(\nu^{\frac{1}{m_\kappa+1}}, \nu^{\frac{1}{n_\kappa+1}}\big)\big\}.$$

Рівність (16) тепер випливає з (14). □

Якщо коефіцієнти a_γ оператора A є сталими, то із результатів [9] для $1 \le q < \infty$ і всіх $m \in \mathbb{N}$ маємо

$$\mathcal{E}_q(\mathcal{C}^m) := \bigcup_{\nu>0} \mathcal{E}_q^\nu(\mathcal{C}^m) = \Big\{u \in Exp\,(\mathbb{C}^n)_{|\,\Omega} : B_j A^k u_{|\,\partial\Omega} = 0; j = 1, \dots, l; k \in \mathbb{Z}_+\Big\},$$

де $Exp\,(\mathbb{C}^n)$ — простір цілих аналітичних функцій експоненціального типу над $\mathbb{C}^n$. Тому в цьому випадку отримуємо $Y = \Big\{\sum_{n\in\mathbb{Z}_+} u_n = u : u_n \in Exp\,(\mathbb{C}^n)_{|\,\Omega};\ B_j A^k u_{n|\,\partial\Omega} = 0; j = 1, \dots, l; k \in \mathbb{Z}_+\Big\}$.

Література

1. Горбачук М.Л., Горбачук В.І. *Про наближення гладких векторів замкненого оператора цілими векторами експоненціального типу* // Укр. мат. журн. – 1995. – Т. 47, №5. – С. 616–628.

2. Горбачук В.И., Горбачук М.Л. *Операторный подход к вопросам аппроксимации* // Алгебра и анализ. – 1997. – Т.9, №6. – С. 90–108.

3. Горбачук В.И., Князюк А.В. *Граничные значения решений дифференциально-операторных уравнений* // Усп. мат. наук. – 1989. – Т. 44, №3. – С. 55–91.

4. Дмитришин М.І., Лопушанський О.В. *Абстрактні простори Бесова, асоційовані із замкненими операторами в банахових просторах* // Доп. НАН України. – 2007. – №12. – С. 16–22.

5. Дмитришин М., Лопушанський О. *Інтерполяція векторів експоненціального типу дробових степенів позитивних операторів* // Вісник Львів. ун-ту. Серія мех.-мат. – 2005. – Вип. 64. – С. 99–106.

6. Радыно Я.В. *Пространство векторов экспоненциального типа* // Докл. АН БССР. – 1983. – Т. 27, №9. – С. 791–793.

7. Bergh J., Löfström J. Interpolation spaces. An introduction, Springer, Berlin, 1976. – 247 p.

8. Dunford N., Schwartz J.T. Linear operator. Part I: General theory. Intersci. Publishers, New York, London, 1958.

9. Lopushansky O., Dmytryshyn M. *Operator calculus on the exponential type vectors of the operator with point spectrum* // Chapter 12 in book *"General Topology in Banach Spaces"*. Nova Sci. Publ., Huntington, New York. 2001. P. 137–145.

10. Triebel H. Interpolation theory. Function spaces. Differential operators, Springer, Berlin, 1995. – 664 p.

Прикарпатський національний університет ім. В. Стефаника,

Івано-Франківськ, Україна

Надійшло 15.10.2010

Dmytryshyn M.I. *The spaces of exponential type vectors of complex degrees of positive operators*, Carpathian Mathematical Publications, **2**, 2 (2010), 21–30.

New classes of interpolation spaces of exponential type vectors of complex degrees of positive operators are defined. Properties of the approximation spaces generated by the considered interpolation spaces are investigated. An example of application of constructed theory to the regular elliptic boundary problems is considered. In the example exponential type vectors coincide with root vectors. On the other hand, for operators with constant coefficients the set of exponential type vectors is subclass of whole functions of exponential type.

Дмитришин М.И. *Пространства векторов экспоненциального типа комплексных степеней позитивных операторов* // Карпатские математические публикации. — 2010. — Т.2, №2. — С. 21–30.

Определены новые классы интерполяционных пространств векторов экспоненциального типа комплексных степеней позитивных операторов. Исследованы свойства аппроксимационных пространств, порожденных рассмотренными интерполяционными пространствами. Приведен пример применения к регулярным эллиптическим граничным задачам, в котором векторы экспоненциального типа совпадают с корневыми векторами, а для операторов с постоянными коэффициентами являются подклассом целых функций экспоненциального типа.

Карпатські математичні публікації. Т.2, №2 | Carpathian Mathematical Publications. V.2, №2

УДК 517.98

Загороднюк А.В.[1], Чернега І.В.[2]

СПЕКТР АЛГЕБР СИМЕТРИЧНИХ ТА СУБСИМЕТРИЧНИХ АНАЛІТИЧНИХ ФУНКЦІЙ

Загороднюк А.В., Чернега І.В. *Спектр алгебр симетричних та субсиметричних аналітичних функцій* // Карпатські математичні публікації. — 2010. — Т.2, №2. — С. 31–38.

В роботі досліджуються алгебри симетричних та субсиметричних аналітичних функцій обмеженого типу на просторах $L_1[0,\infty)\cap L_\infty[0,\infty)$ та $L_\infty[0,1]$ і їх спектри.

Вступ

Нехай X, Y — банахові простори над полем $\mathbb{K}$, де $\mathbb{K}=\mathbb{R}$ або $\mathbb{K}=\mathbb{C}$. Нагадаємо, що відображення $P: X\to Y$ називається *n-однорідним поліномом,* якщо існує симетричне n-лінійне відображення $A: X^n\to Y$ таке, що $P(x)=A(x,\dots,x)$. *Поліном степеня m* є скінченною сумою n-однорідних поліномів, $n=1,\dots,m$.

Нехай G — напівгрупа ізометричних операторів на просторі X. Функція f з простору X називається *симетричною відносно G* (або *G-симетричною,*) якщо $f(\sigma(x))=f(x)$ для кожного $\sigma\in G$. Важливим прикладом є випадок, коли $X=\ell_p$ $(1\le p<\infty)$ і $G=\mathcal{G}$ — група перестановок на множині натуральних чисел. Тоді $\sigma\in\mathcal{G}$ діє на просторі ℓ_p наступним чином:

$$\sigma\Big(\sum_{i=1}^{\infty}x_ie_i\Big)=\sum_{i=1}^{\infty}x_ie_{\sigma(i)},$$

де $\{e_1,e_2\dots,\}$ — стандартна база на просторі ℓ_p. В літературі $\mathcal{G}$-симетричні функції на ℓ_p називають *симетричними.*

Функція f на просторі $L_p[0,1]$ називається симетричною, якщо $f(\sigma x)=f(x)$ для довільного $\sigma\in\Sigma$, де Σ є групою вимірних автоморфізмів відрізка $[0,1]$, які зберігають міру.

Іншим важливим прикладом є випадок, коли $X=\ell_p$ і $G=\mathfrak{S}$ — напівгрупа, породжена ізометричними операторами β_i,

$$\beta_i\colon (x_1,x_2,\dots)\mapsto(x_1,\dots,x_{i-1},0,x_i,\dots). \qquad (1)$$

2000 *Mathematics Subject Classification:* 46-02, 46E30, 46J20.

Ключові слова і фрази: спектр алгебр, симетричні та субсиметричні аналітичні функції.

$\mathfrak{S}$-симетричні функції називають *субсиметричними*.

Симетричні поліноми на гільбертових просторах та просторах ℓ_p і $L_p[0,1]$, $1<p<\infty$, вперше досліджувались Немировським і Семеновим в [12]. Властивості симетричних поліномів та аналітичних функцій вивчалися в [7, 1]. Зокрема, в роботі [7] отримано точне представлення симетричних поліномів на банахових просторах з симетричною базою та так званих переставно-інваріантних просторах функцій за допомогою елементарних симетричних поліномів. В [1] авторами досліджується спектр алгебри симетричних голоморфних функцій на просторі ℓ_p. Максимальні ідеали алгебр аналітичних функцій вивчалися в роботах [2, 3, 4, 14, 15].

В роботі [7] доведено, що, подібно до скінченновимірного випадку, поліноми

$$F_k(x)=\sum_{i=1}^{\infty}x_i^k, \qquad k=\lceil p\rceil,\lceil p\rceil+1\dots, \tag{2}$$

утворюють *алгебраїчну базу* в алгебрі всіх симетричних поліномів на просторі ℓ_p, де $\lceil p\rceil$ — найменше ціле число, яке є більшим або дорівнює p. Тобто, для кожного симетричного полінома P степеня $\lceil p\rceil+n-1$, $n\geq 1$ існує поліном $q\in\mathbb{C}^n$, такий що $P(x)=q(F_{\lceil p\rceil}(x),\dots,F_{\lceil p\rceil+n-1}(x))$.

Позначимо через $G_k(x)=\int\limits_0^1 x^k(t)dt$ елементарні симетричні поліноми на просторі $L_p[0,1]$, $k=1,\dots,p$. Згідно з [7], кожен симетричний поліном на просторі L_p належить до алгебраїчної оболонки поліномів G_k, $k\leq p$.

Субсиметричні поліноми досліджувались в роботах [8, 9, 12]. Так, у статті [8] (Теорема 2.1) Р. Гонзало показує, що так звані *стандартні* поліноми

$$F_{k_1,\dots,k_n}(x)=\sum_{i_1<\dots<i_n}x_{i_1}^{k_1}\cdots x_{i_n}^{k_n}, \quad k_1+\dots+k_n=n, \tag{3}$$

утворюють лінійну базу у скінченновимірному просторі n-однорідних субсиметричних поліномів для $n\geq\lceil p\rceil$.

Для банахового простору X позначимо через $\mathcal{P}(X)$ алгебру всіх поліномів на X і через $\mathcal{P}_s(X)$ (відпов. $\mathcal{P}_{s_{b_s}}(\ell_p)$) — алгебру всіх симетричних (відпов. субсиметричних) поліномів на X. Поповнення $\mathcal{P}(X)$ в метриці рівномірної збіжності на обмежених множинах співпадає з алгеброю цілих аналітичних функцій обмеженого типу $H_b(X)$ на просторі X. Через $H_{bs}(X)$ (відпов. $H_{bs_{b_s}}(\ell_p)$) ми будемо позначати підалгебру всіх симетричних (відпов. субсиметричних) функцій алгебри $H_b(X)$. Ми також будемо позначати через $M_{bs}(\ell_p)$ і $M_{bs_{b_s}}(\ell_p)$ спектр (множину комплексних гомоморфізмів) алгебр $H_{bs}(\ell_p)$ і $H_{bs_{b_s}}(\ell_p)$ відповідно.

1 Симетричні аналітичні функції на просторі $L_1[0,\infty)\cap L_\infty[0,\infty)$

Позначимо через E простір

$$E=L_1[0,\infty)\cap L_\infty[0,\infty)$$

з нормою

$$\|x\|_E=\max\{\|x\|_{L_1[0,\infty)},\|x\|_{L_\infty[0,\infty)}\}.$$

Також позначимо через $\mathcal{P}_s(E)$ алгебру всіх поліномів на просторі E, симетричних відносно групи вимірних автоморфізмів інтервалу $[0,\infty)$.

Нехай, також, $R_k(x)=\int\limits_0^\infty x^k(t)dt$.

Твердження 1.1. *Поліноми R_k є коректно визначеними на просторі E для кожного $k=1,2,\dots$, і послідовність $\{R_k\}$ утворює алгебраїчну базу в алгебрі $\mathcal{P}_s(E)$.*

Доведення. Оскільки простір E є переставно-інваріантним простором функцій на інтервалі $[0,\infty)$ (див. [10, ст.118]), то послідовність поліномів $\{R_k\}$ утворює алгебраїчну базу в $\mathcal{P}_s(E)$ згідно з [7], теорема 2.12. □

Позначимо через Ψ відображення, яке кожному $P\in\mathcal{P}_s(\ell_1)$, $P=q(F_1,\dots,F_m)$, ставить у відповідність $Q\in\mathcal{P}_s(E)$, $Q=q(R_1,\dots,R_m)$. Зауважимо, що Ψ є бієкцією і гомоморфізмом алгебр симетричних поліномів.

Для даного елемента $(a_1,\dots,a_n,\dots)\in\ell_1$ покладемо

$$f_a(t)=\sum_{k=1}^{\infty}a_k\chi_{\Delta_k}(t), \tag{4}$$

де $\Delta_k=[k-1,k)$, $k=1,2,\dots,$ і $\chi_{\Delta_k}(t)=\begin{cases}1, & t\in\Delta_k;\\ 0, & t\notin\Delta_k.\end{cases}$

Тоді

$$\|f_a\|=\max\Big\{\sum_k|a_k|,\sup_k|a_k|\Big\}=\sum_k|a_k|=\|a\|.$$

Позначимо через $\Gamma(Q)$ звуження $Q\in\mathcal{P}_s(E)$ на лінійний простір східчастих функцій $\{f_a,\ a\in\ell_1\}$.

Легко бачити, що

$$R_n\Big(\sum_{k=1}^{\infty}a_k\chi_k(t)\Big)=F_n\Big(\sum_{k=1}^{\infty}a_ke_k\Big), \tag{5}$$

тобто $Q(f_a)=q(R_1(f_a),\dots,R_m(f_a))=q(F_1(a),\dots,F_m(a))=\Psi^{-1}(Q)(a)$.

Отже, $\Gamma=\Psi^{-1}$.

Твердження 1.2. *Для довільних поліномів $P\in\mathcal{P}_s(\ell_1)$, $Q=\Psi(P)\in\mathcal{P}_s(E)$ має місце нерівність:*

$$\|P\|\leq\|Q\|.$$

Доведення. Нехай P — симетричний поліном на ℓ_1, $P=q(F_1,\dots,F_m)$ і нехай $Q=\Psi(P)=q(R_1,\dots,R_m)$.

Нехай, також, $\|P\|=c$. Тоді для кожного $\varepsilon>0$ існує $x_\varepsilon\in\ell_1$, $\|x_\varepsilon\|=1$, таке що $c-\varepsilon\leq|P(x_\varepsilon)|\leq c+\varepsilon$.

Нехай $F_1(x_\varepsilon) = c_1, \dots, F_m(x_\varepsilon) = c_m$. Тоді $c - \varepsilon \le |q(c_1, \dots, c_m)| \le c + \varepsilon$. Розглянемо функції $f_{x_\varepsilon} \in E$ вигляду (4), $\|f_{x_\varepsilon}\| = \|x_\varepsilon\| = 1$ що залежать від x_ε і, такі що

$$R_1(f_{x_\varepsilon}) = c_1, \dots, R_m(f_{x_\varepsilon}) = c_m.$$

Тоді маємо, що

$$|Q(f_{x_\varepsilon}) - c| = |q(c_1, \dots, c_m) - c| = |P(x_\varepsilon) - c| \le \varepsilon$$

і отже,

$$\|P\| \le \|Q\|.$$

□

З твердження 1.2 випливає, що Γ є неперервним.

Лема 1.1. *Нехай $H_1(X)$, $H_2(Y)$ — підалгебри Фреше аналітичних функцій над банаховими просторами X, Y, і нехай $T : H_1(X) \to H_2(Y)$ — неперервний сюр'єктивний гомоморфізм, такий що T є бієктивним оператором з $\mathcal{P}_1(X)$ в $\mathcal{P}_2(Y)$, де $\mathcal{P}_1(X)$, $\mathcal{P}_2(Y)$ — підпростори всіх поліномів в $H_1(X)$ і $H_2(Y)$ відповідно. Тоді T є ізоморфізмом алгебр $H_1(X)$ і $H_2(Y)$.*

Доведення. Припустимо, що $T : H_1(X) \to H_2(Y)$ не є ін'єктивним. Тоді існує аналітична функція f, така що $T(f) = 0$. Нехай $f = \sum_{k=0}^{\infty} P_k \ne 0$, де P_k є k-однорідними поліномами, $k = 0, 1, \dots$. Тоді, за неперервністю T, $T(f) = \sum_{k=0}^{\infty} T(P_k) \ne 0$. Таким чином, суперечність показує, що T мусить бути ін'єктивним оператором з $H_1(X)$ в $H_2(Y)$. Отже, T є неперервним і бієктивним. Застосовуючи теорему про обернене відображення для просторів Фреше, ми отримуємо, що T^{-1} — неперервний. □

Теорема 1. *$H_{bs}(E)$ може бути неперервно вкладена в $H_{bs}(\ell_1)$, як щільна підалгебра.*

Доведення. Візьмемо $\gamma = \sum_{m=0}^{\infty} Q_m$, $\gamma \in H_{bs}(E)$ і $\zeta = \sum_{m=0}^{\infty} P_m$, $\zeta \in H_{bs}(\ell_1)$, $P_m = \Gamma(Q_m)$. Оскільки $\sum_{m=0}^{\infty} Q_m$ збігається, то

$$\limsup_{m\to\infty} \|Q_m\|^{1/m} = \frac{1}{\mathcal{R}_E(\gamma)} = 0,$$

де $\mathcal{R}_E(\gamma)$ є радіусом збіжності γ в E.

З твердження 1.2 маємо, що $\|P_m\| \le \|Q_m\|$ для кожного m. Тоді

$$\frac{1}{\mathcal{R}_{\ell_1}(\zeta)} := \limsup_{m\to\infty} \|P_m\|^{1/m} \le \limsup_{m\to\infty} \|Q_m\|^{1/m} = \frac{1}{\mathcal{R}_E(\gamma)} = 0,$$

і, таким чином, $\mathcal{R}_{\ell_1}(\zeta) = \infty$.

Отже, з того, що $\sum_{m=0}^{\infty} Q_m \in H_{bs}(E)$, випливає, що $\sum_{m=0}^{\infty} P_m \in H_{bs}(\ell_1)$, і ми маємо неперервне вкладення $H_{bs}(E) \subset H_{bs}(\ell_1)$, яке є продовженням Γ зі щільного підпростору поліномів і яке ми будемо позначати тим самим символом. Очевидно, що Γ є гомоморфізмом зі щільним образом. □

Зауважимо, що коли Γ є сюр'єктивним відображенням, то, використовуючи лему 1.1, ми отримуємо, що $H_{bs}(E)$ є ізоморфним до $H_{bs}(\ell_1)$.

Наслідок 1.1. $M_{bs}(E) \supset M_{bs}(\ell_1)$.

2 Випадок $L_\infty[0,1]$

Теорема 2. *$H_{bs}(E)$ неперервно вкладається в $H_{bs}(L_\infty[0,1])$, як щільна підалгебра.*

Доведення. Кожну функцію $\gamma \in L_\infty[0,1]$ ми можемо продовжити до функції $\widetilde{\gamma}$ на E наступним чином:

$$\widetilde{\gamma} = \begin{cases} \gamma, & t \in [0,1]; \\ 0, & t \in [0,\infty) \setminus [0,1]. \end{cases}$$

Нехай

$$T : H_{bs}(E) \to H_{bs}(L_\infty[0,1]), \qquad T(f)(\gamma) = f(\widetilde{\gamma}).$$

Легко бачити, що T є неперервним гомоморфізмом, $|T(Q_n)| \le \|Q_n\|$ для кожного n-однорідного симетричного полінома Q_n і, крім того, $T(R_n) = G_n$. Таким чином, T є ізоморфізмом за лемою 1.1. □

Як і у випадку алгебри $H_{bs}(E)$, ми можемо розглянути звуження функцій з алгебри $H_{bs}(L_\infty[0,1])$ на східчасті функції. Зафіксуємо $n \in \mathbb{N}$, візьмемо довільний вектор $(a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{C}^n$ і нехай $\Delta_k = [\frac{k-1}{n}, \frac{k}{n})$, $k = 1, \dots, n$.

Як і раніше, визначимо функцію $f_a(t)$ наступним чином:

$$f_a(t) = \sum_{k=1}^{n} a_k \chi_{\Delta_k}(t),$$

де $\chi_{\Delta_k}(t) = \begin{cases} 1, & t \in \Delta_k, \\ 0, & t \notin \Delta_k. \end{cases}$

Тоді

$$G_m(f_a) = \int_0^1 \left(\sum_{k=1}^{n} a_k \chi_{\Delta_k}(t) \right)^m dt = \int_0^1 \left(\sum_{k=1}^{n} a_k^m \chi_{\Delta_k}(t) \right) dt = \frac{\sum_{k=1}^n a_k^m}{n} = \frac{F_m(a)}{n}.$$

Для заданого $f \in L_\infty[0,1]$ визначимо $f_n(t) = \sum_{k=1}^n a_{kn} \chi_{\Delta_n}(t)$ — послідовність східчатих функцій, таких що $f_n \to f$ при $n \to \infty$. Тоді

$$G_m(f) = \lim_{n\to\infty} \frac{\sum_{k=1}^n a_{kn}^m}{n}.$$

Твердження 2.1. *Для довільного вектора* $(\xi_1,\dots,\xi_n)\in\mathbb{C}^n$ *існує східчата функція* $f(t)\in L_\infty[0,1]$, *така що*

$$G_k(f)=\xi_k.$$

Доведення. Відомо (див. [1]), що існує $x=(x_1,\dots,x_n,\dots)\in\ell_p$ такий, що $F_k(x)=n\xi_k$. Тоді $G_k(f)=\frac{F_k}{n}$. □

3 Субсиметричні аналітичні функції на E

Для $\zeta\in E$ і $0\le s_1<s_2$ означимо ізометричні оператори $\beta_{[s_1,s_2]}$ на просторі $H_{bs_{b_s}}(E)$ наступним чином:

$$\beta_{[s_1,s_2]}(\zeta(t))=\zeta(\beta_{[s_1,s_2]}(t)):=\begin{cases}\zeta(t), & t\in[0,s_1),\\ 0, & t\in[s_1,s_2],\\ \zeta(t-s_2+s_1), & t\in(s_2,\infty).\end{cases}$$

Означення 3.1. *Функція* $f\in E$ *є субсиметричною, якщо* $f(t)=f(\beta_{[s_1,s_2]}(t))$ *для довільного оператора* $\beta_{[s_1,s_2]}$, $0\le s_1<s_2$.

Зауважимо, що $\beta_{[s_1,s_2]}$ є аналогом оператора β_i, що визначається формулою (1).

Згідно з формулою (3), поліном F_{k_1,k_2} може бути записаний у вигляді

$$F_{k_1,k_2}(x)=\sum_{i,j=1}^{\infty}x_i^{k_1}x_{j+i}^{k_2},$$

і якщо $k_1=k_2$, то він симетричний. Наступне твердження показує, що для субсиметричних поліномів на E ситуація є іншою.

Твердження 3.1. *Поліном*

$$R_{1,1}(\gamma)=\int_0^\infty\int_0^\infty\gamma(t)\gamma(t+s)dsdt$$

є субсиметричним, але не симетричним.

Субсиметричність полінома є очевидною.

Приклад 3.1. *Розглянемо функцію* $\gamma(t)=\exp(-t)$ *і вимірний автоморфізм* $\sigma_{1,3}:\Delta_1\leftrightarrow\Delta_3$, *де* $\Delta_k=[k-1,k)$, $k=1,2,3$. *Легко бачити, що*

$$R_1(\gamma)=\int_0^\infty\exp(-t)dt=$$

$$\int_{\Delta_1}\exp(-t-2)dt+\int_{\Delta_2}\exp(-t)dt+\int_{\Delta_3}\exp(-t+2)dt+\int_3^\infty\exp(-t)dt,$$

тобто $R_1(\gamma)=\sigma_{1,3}(R_1(\gamma))$. *Однак,*

$$R_{1,1}(\gamma)=\int_0^\infty\int_0^\infty\exp(-t)\exp(-(t+s))dsdt\neq$$

$$\int_{\Delta_1}\int_{\Delta_1}\exp(-t-2)\exp(-t-s-2)dsdt+\int_{\Delta_2}\int_{\Delta_2}\exp(-t)\exp(-t-s)dsdt+$$

$$\int_{\Delta_3}\int_{\Delta_3}\exp(-t+2)\exp(-t-s+2)dsdt+\int_3^\infty\int_3^\infty\exp(-t)\exp(-t-s)dsdt=\sigma_{1,3}(R_{1,1}(\gamma)).$$

Таким чином, поліном $R_{1,1}(\gamma)$ *не є симетричним.*

Для даного елемента $(a_1,\dots,a_n,\dots)\in\ell_1$ визначимо функцію $f_a(t)$ за формулою (4). Розглянемо звуження полінома $R_{1,1}\in\mathcal{P}_{bs_{b_s}}(E)$ на лінійний простір східчастих функцій $\{f_a,\ a\in\ell_1\}$, яке ми, як і у випадку симетричних поліномів, будемо позначати Γ.

Твердження 3.2. *Відображення* Γ *має нетривіальне ядро.*

Доведення. Маємо, що

$$R_{1,1}(f_a)=\int_0^\infty\int_0^\infty\sum_{k=1}^\infty a_k\chi_{\Delta_k}(t)\sum_{k=1}^\infty a_k\chi_{\Delta_k}(t+s)dsdt=$$

$$\frac12\sum_{i=1}^\infty a_i^2+\sum_{\substack{i<j,\\ i,j=1}}^\infty a_ia_j=\frac{F_2}{2}+G_2,$$

де $G_2=\sum_{\substack{i<j,\\ i,j=1}}^\infty x_ix_j$.

Використовуючи той факт, що $G_2=\dfrac{F_1^2-F_2}{2}$, ми отримуємо

$$\Gamma(R_{1,1})=\frac{F_1^2}{2}.$$

З іншого боку, $\Gamma^{-1}\left(\frac{F_1^2}{2}\right)=\frac{R_1^2}{2}$, і таким чином,

$$R_{1,1}-\frac{R_1^2}{2}\xrightarrow{\Gamma}0.$$

□

Наслідок 3.1. *Існує комплексний гомоморфізм* $\varphi\in M(E)$, *такий що* $\varphi\notin M_{bs_{b_s}}(\ell_1)$.

Література

1. Alencar R., Aron R., Galindo P., Zagorodnyuk A., *Algebras of symmetric holomorphic functions on* ℓ_p, Bull. Lond. Math. Soc. **35** (2003), 55–64.

2. Aron R.M., Cole B.J., Gamelin T.W., *Spectra of algebras of analytic functions on a Banach space*, J. Reine Angew. Math. **415** (1991), 51–93.

3. Aron R.M., Cole B.J., Gamelin T.W., *Weak-star continuous analytic funtions*, Can. J. Math. **47** (1995), 673–683.

4. Aron R.M., Galindo P., Garcia D., Maestre M., *Regularity and algebras of analytic function in infinite dimensions*, Trans. Amer. Math. Soc. **348** (1996), 543–559.

5. Dineen S., *Complex Analysis in Locally Convex Spaces*, North-Holland, Mathematics Studies, Amsterdam, New York, Oxford, **57**(1981).
6. Dineen S., Complex Analysis on Infinite Dimensional Spaces, Monographs in Mathematics, Springer, New York, 1999.
7. González M., Gonzalo R., Jaramillo J., *Symmetric polynomials on rearrangement invariant function space*, J. London Math. Soc. **(2) 59**, (1999) 681–697.
8. Gonzalo R., *Multilinear forms, subsymmetric polynomials and spreading models on Banach spaces*, J. Math. Anal. Appl. **202** (1996), 379–397.
9. Hájek P., *Polynomial algebras on classical Banach spaces*, Israel J. Math. **106** (1998), 209–220.
10. Lindestrauss J., Tzafriri L., Classical Banach spaces II, Springer-Verlag, New York, 1977.
11. Mujica J., Complex Analysis in Banach Spaces, North-Holland, Amsterdam, New York, Oxford, 1986.
12. Nemirovskii A.S., Semenov S.M., *On polynomial approximation of functions on Hilbert space*, Mat. USSR Sbornik **21** (1973), 255–277.
13. Novosad Z., Zagorodnyuk A., *Polynomial automorphisms and hypercyclic operators on spaces of analytic functions*, Arch. Math. **89** (2007), 157–166.
14. Zagorodnyuk A., *Spectra of algebras of entire functions on Banach spaces*, Proc. Amer. Math. Soc. **134** (2006), 2559–2569.
15. Zagorodnyuk A., *Spectra of algebras of analytic functions and polynomials on Banach spaces*, Contemp. Math. **435** (2007), 381–394.

[1] Прикарпатський національний університет ім. В. Стефаника,
Івано-Франківськ, Україна
[2] Інститут прикладних проблем механіки та математики НАН України,
Львів, Україна

Надійшло 17.09.2010

Zagorodnyuk A.V., Chernega I.V. *Spectra of algebras of symmetric and subsymmetric analytic functions*, Carpathian Mathematical Publications, **2**, 2 (2010), 31–38.

Algebras of symmetric and subsymmetric analytic functions of bounded type on spaces $L_1[0,\infty)\cap L_\infty[0,\infty)$ and $L_\infty[0,1]$ and their spectra are investigated.

Загороднюк А.В., Чернега И.В. *Спектр алгебр симметрических и субсимметрических аналитических функций* // Карпатские математические публикации. — 2010. — Т.2, №2. — С. 31–38.

В роботе исследуются алгебры симметрических и субсимметрических аналитических функций ограниченного типа на пространствах $L_1[0,\infty)\cap L_\infty[0,\infty)$ и $L_\infty[0,1]$ и их спектры.

Карпатські математичні публікації. Т.2, №2

Carpathian Mathematical Publications. V.2, №2

УДК 515.12+512.58

Zarichnyi I.M.

CHARACTERIZATION OF THE MACRO-CANTOR SET UP TO COARSE EQUIVALENCE

Zarichnyi I.M. *Characterization of the macro-Cantor set up to coarse equivalence*, Carpathian Mathematical Publications, **2**, 2 (2010), 39–47.

We characterize metric spaces that are coarsely equivalent to the macro-Cantor set $2^{<\mathbb{N}}$.

The well-known Cantor set

$$\left\{\sum_{i=1}^{\infty} k_i\cdot 3^{-i}\mid (k_i)_{i=1}^{\infty}\in\{0,2\}^{\mathbb{N}}\right\}\subset\mathbb{R}$$

has a macro analog

$$\left\{\sum_{i=1}^{m} k_i\cdot 3^{i}\mid m\in\mathbb{N},\ \ (k_i)_{i=1}^{m}\in\{0,2\}^{m}\right\}\subset\mathbb{R},$$

called the *macro-Cantor set* (see, e. g., [1]).

The macro-Cantor set plays the same role in the zero-dimensional asymptotic geometry as the Cantor set does in the zero-dimensional topology. It is well known that every zero-dimensional compact metric space without isolated points is homeomorphic to the Cantor set (see e. g. [3]). The main result of this paper is a characterization of metric spaces that are coarsely equivalent to the macro-Cantor set.

It is convenient to introduce the notion of coarse equivalence with help of multi-valued maps. By definition, a *multi-valued map* between sets X, Y is any function f that assigns to each point $x\in X$ a (possibly empty) subset $f(x)\subset Y$. Such a function f assigns to a subset $A\subset X$ the subset $f(A)=\bigcup_{a\in A}f(a)$ of Y.

The *oscillation* of a multi-map $\Phi: X\to Y$ between metric spaces is the function $\omega_\Phi:[0,\infty)\to[0,\infty]$ assigning to each $\delta\geq 0$ the (finite or infinite) number

$$\omega_\Phi(\delta)=\sup\{\operatorname{diam}(\Phi(A))\mid A\subset X,\ \operatorname{diam}(A)\leq\delta\}.$$

2000 *Mathematics Subject Classification:* 54E15, 54E35.
Key words and phrases: asymptotic dimension zero, macro-Cantor set, coarse equivalence.

Definition 1. *A multi-valued map $\Phi : X \to Y$ between metric spaces X, Y is called*

- macro-uniform, *if $\omega_\Phi(\delta)$ is finite for each $\delta < \infty$;*
- a coarse equivalence, *if $\Phi(X) = Y$, $\Phi^{-1}(Y) = X$ and both multi-valued maps Φ and Φ^{-1} are macro-uniform.*

Two metric spaces X, Y are called *coarsely equivalent* if there is a coarse equivalence $f : X \to Y$. In particular, the macro-Cantor set is coarsely equivalent to the macro-Cantor cube

$$2^{<\mathbb{N}} = \{(x_i)_{i\in\omega} \in \{0,1\}^\omega \mid \exists n \in \omega\ \forall n \geq m\ (x_n = 0)\}$$

endowed with the metric

$$d((x_i), (y_i)) = \min\{i \in \omega \mid x_j = y_j, \text{ for all } j > i\}.$$

In the sequel, for a metric space (Y, ρ) and a subset $C \subset Y$ by $U_\varepsilon(C)$ we denote the ε-neighborhood of C in Y. For any nonempty sets $A, B \subset Y$ we put

$$\operatorname{dist}(A, B) = \inf\{\rho(a, b) \mid a \in A,\ b \in B\}.$$

The following is a characterization theorem for the macro-Cantor set.

Theorem 1. *A metric space (Y, ρ) is coarsely equivalent to the macro-Cantor set if and only if there exist numbers $a > 0$, $n \in \mathbb{N}$ and monotonically increasing divergent sequences $(a_i)_{i\in\mathbb{N}}$, $(n_i)_{i\in\mathbb{N}}$ of real and natural numbers respectively, such that the following holds: for every i the set Y can be written as the disjoint union of a countable family of sets $\{Y_j\}_{j\in\mathbb{N}}$, such that for every $j, k \in \mathbb{N}$ $\operatorname{diam}(Y_j) \leq a_i$, $\operatorname{dist}(Y_j, Y_k) > a_{i-1}$ and the set Y_j can be covered by 2^{n_i+n} sets and cannot be covered by less than 2^{n_i} sets of diameter not exceeding a.*

Proof. Without loss of generality we can assume that $n_{i-1} - n_{i-2} - n > 2$ for every i.

Necessity. Let a metric space (Y, ρ) be coarsely equivalent to the macro-Cantor set X. Then consider a multi-valued map $f : X \to Y$ from the definition of coarse equivalence and define sequences $\{a_i\}_{i\in\mathbb{N}}$, $\{b_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ in the following way.

Put $b_1 = 1$. Suppose that we have defined $b_1, \dots b_i$ and $a_1, \dots, a_{i-1}$. From the definition of coarse equivalence for f there exist natural numbers $a_i > \omega_f(b_i)$ and $b_{i+1} > \omega_{f^{-1}}(a_i)$.

Let $i \in \mathbb{N}$. We can represent X as the union $X = \bigcup\limits_{j\in\mathbb{N}} X_j^i$, where $\operatorname{diam}(X_j^i) = b_i$, $U_{b_i}(X_j^i) = X_j^i$ for all $j \in \mathbb{N}$. Then for all $i, j \in \mathbb{N}$ define $Y_j^i = f(X_j^i)$. It is easy to see that $Y = \bigcup\limits_{j\in\mathbb{N}} Y_j^i$, $\operatorname{diam}(Y_j^i) = a_i$ for all $j \in \mathbb{N}$, $i \in \mathbb{N}$.

Since for all $i > 1$ $\operatorname{dist}(X_j^i, X_k^i) > b_i$, $i, j \in \mathbb{N}$, we easily obtain that $\operatorname{dist}(Y_j^i, Y_k^i) > a_{i-1}$, $j, k \in \mathbb{N}$.

Then we can see that for any $i, j, k \in \mathbb{N}$, $i < j$, there exists a unique $l \in \mathbb{N}$ such that $Y_k^i \subset Y_l^j$.

Note, that for all $i > 1, j \in \mathbb{N}$, the set Y_j^i can be written as the union $Y_j^i = \bigcup\limits_{k=1}^{2^{b_i-b_1}} Y_{l_k}^1$. The set Y_j^i can be covered by at most $2^{b_i-b_1}$ sets of diameter a_1.

Similarly, $Y_j^i = \bigcup\limits_{k=1}^{2^{b_i-b_2}} Y_{l_k}^2$. Since the distance between the sets Y_p^2 and Y_q^2 is greater then a_1, the set Y_j^i cannot be covered by less than $2^{b_i-b_2}$ sets of diameter not exceeding a_1.

The necessity is proved.

Sufficiency. Let Y be a metric space, numbers $a > 0$, $n \in \mathbb{N}$, and monotonically increasing sequences $(a_i)_{i\in\mathbb{N}}$, $(n_i)_{i\in\mathbb{N}}$, of real and natural numbers respectively are from the conditions of the theorem.

Let X denotes the macro-Cantor set and

$$X_j^i = \{x = (x_1, x_2, x_3, \dots) \mid x_i = \eta_1, x_{i+1} = \eta_2, \dots,\},$$

where

$$j = 1 + \eta_1 + 2\cdot\eta_2 + 2^2\cdot\eta_3 + \dots + a_p\cdot 2^{p-1} + \dots,$$

$\eta_k \in \{0,1\}$. It is easy to see that $\operatorname{diam}(X_j^i) < 2^i$, and for every $a < b, c, d$, either $X_c^a \subset X_d^b$ or $X_c^a \cap X_d^b = \varnothing$.

We will use that $\Theta(A)$ is the minimal natural number k such that A can be written as the disjoint union of k balls of diameter not exceeding a.

For every natural i let $Y = Y_1^i \cup Y_2^i \cup \dots$ be a decomposition such that for every natural j, k, $\operatorname{diam}(Y_j^i) \leq a_i$, $\operatorname{dist}(Y_j^i, Y_k^i) > a_{i-1}$ and $2^{n_j} \leq \Theta(Y_k^j) \leq 2^{n_j+n}$ for every natural j, k. Let $\Theta_{\max}^j = \max\limits_k \Theta(Y_k^j)$.

We assume that

$$Y_1^k = Y_1^t \cup Y_2^t \cup \dots \cup Y_{r_1}^t,$$
$$Y_2^k = Y_{r_1+1}^t \cup Y_{r_1+2}^t \cup \dots \cup Y_{r_2}^t,$$
$$\dots$$

for every natural k, t, $k > t$.

Step a). Consider a sequence of real numbers (α_k) such that $1 < \alpha_k < 2$, $\prod\limits_{k\in\mathbb{N}} \alpha_k = 2$, $\alpha_0 = 1$.

Let us construct sequences of natural numbers $(c_i)_{i\in\mathbb{N}}, (d_i)_{i\in\mathbb{N}}$ by induction. Let $d_1 = 1$, and let $c_i > d_i$ be such that

$$\begin{aligned} 1 + \frac{2^{n_{d_i}+n}\cdot 2^{n_{d_1}+3n+2}\cdot 8}{2^{n_{c_i}}} &\leq \alpha_{2i+1}, \\ 1 - \frac{2^{n_{d_i}}\cdot 2^{n_{d_1}+3n+2}}{2^{n_{c_i}+n}\cdot 8} &\geq \frac{1}{\alpha_{2i+1}}, \end{aligned} \tag{$a(2i+1)$}$$

$d_i > c_{i-1}$ and for any $t > 2^{n_{d_i}}$,

$$\begin{aligned} t + \Theta_{\max}^{c_{i-1}} &\leq t\cdot\alpha_{2i}, \\ t - \Theta_{\max}^{c_{i-1}} &\geq t\cdot\frac{1}{\alpha_{2i}}. \end{aligned} \tag{$a(2i)$}$$

Let us consider the following conditions for a multi-valued function $f : A \to B$:

$$\omega_f(a_{c_{i-1}}) \leq n_{d_i}, \quad \omega_{f^{-1}}(n_{d_i}) \leq a_{c_i}. \tag{$f(i)$}$$

Let $p' = 2^{n_{d_1}+3n+2}$.

Step b). During this step for every natural i we have to construct a multi-valued surjective function $f_i(A,B)(x) : A \to B$, which maps the set $A \subset Y$ into $B \subset X$. Here $A = Y^{d_i}_{l_1} \cup \dots \cup Y^{d_i}_{l_p}$, $B = X^{n_{d_i}}_k$, $1 \le p \le p'$. Also the function f_i must satisfy conditions $(f(1))$, $(f(2))$, ..., $(f(i))$.

Fix $i \in \mathbb{N}$, and let A, B be sets. Let us construct $f_i(A,B)$ by induction. Without loss of generality we can assume that

$$A = Y_1^{d_i}\cup\dots\cup Y_p^{d_i},\quad B = X_1^{n_{d_i}}.$$

It is easy to see that

$$p\cdot 2^{n_{d_i}} \le \Theta(A) \le p\cdot 2^{n_{d_i}+n}.$$

Base of induction. Let $A_1^0 = A$.

Step j, $j\in\{1,\dots,i-1\}$. We see that the set Y is written as a disjoint union of sets

$$Y = A_1^{j-1}\cup\dots\cup A^{j-1}_{2^{n_{d_i}-n_{d_{i-j+1}}}}$$

such that for any $k\in\{1,\dots,2^{n_{d_i}-n_{d_{i-j+1}}}\}$

$$\frac{\Theta(A)}{2^{n_{d_i}-n_{d_{i-j+1}}}}\cdot\prod_{t=0}^{2(j-1)}\frac{1}{\alpha_t} \le \Theta(A_k^{j-1}) \le \frac{\Theta(A)}{2^{n_{d_i}-n_{d_{i-j+1}}}}\cdot\prod_{t=0}^{2(j-1)}\alpha_t,$$

the set A_k^{j-1} is the union of sets from the family $\{Y_q^{c_{i-j}}\}$, and it is assumed that

$$f_i(A,B)(A_k^{j-1}) = X_k^{n_{d_{i-j+1}}},\quad f_i^{-1}(A,B)(X_k^{n_{d_{i-j+1}}}) = A_k^{j-1}.$$

Consider the set A_k^{j-1}. We can represent it as the union

$$A_1^{j-1} = Y_{k_1}^{c_{i-j}}\cup\dots\cup Y_{k_s}^{c_{i-j}}.$$

Now write the set $X_k^{n_{d_{i-j+1}}}$ as the disjoint union of $2^{n_{d_{i-j+1}}-n_{d_{i-j}}} = \xi$ sets, $X_k^{n_{d_{i-j+1}}} = X_{e_1}^{n_{d_{i-j}}}\cup\dots\cup X_{e_f}^{n_{d_{i-j}}}$. We have to divide these sets between the sets $Y_{k_r}^{c_{i-j}}$.

Let $\beta' : \{e_1,\dots,e_f\}\to\{k_1,\dots,k_s\}$ be a surjective function. Note that $\xi > s$. Let $\beta(k_r) = |\{e_t|\beta'(e_t)=k_r\}|$. We have to find β' that minimizes the difference of $\frac{\Theta(Y_{k_r}^{c_{i-j}})}{\beta(k_r)}$.

We see that $\sum_{l=1}^{s} \Theta(Y_{k_l}^{c_{i-j}}) = \Theta(A_k^{j-1})$. Thus there is β' such that, for every $l\in\{1,\dots,s\}$,

$$\frac{\Theta(A_k^{j-1})}{\xi}(\beta(k_r)-2)\le\Theta(Y_{k_r}^{c_{i-j}})\le\frac{\Theta(A_k^{j-1})}{\xi}(\beta(k_r)+2),$$

$$\frac{\Theta(A_k^{j-1})}{\xi}\left(1-\frac{2}{\beta(k_r)}\right)\le\frac{\Theta(Y_{k_r}^{c_{i-j}})}{\beta(k_r)}\le\frac{\Theta(A_k^{j-1})}{\xi}\left(1+\frac{2}{\beta(k_r)}\right).$$

Now let us look at $\beta(k_r)$:

$$\frac{\Theta(Y_{k_r}^{c_{i-j}})\cdot f}{\Theta(A_k^{j-1})}\cdot\frac{1}{4}\le\beta(k_r),$$

$$\beta(k_r)\ge\frac{\Theta(Y_{k_r}^{c_{i-j}})\cdot\xi}{\Theta(A_k^{j-1})\cdot 2}\ge\frac{2^{n_{c_{i-j}}}\cdot 2^{n_{d_{i-j+1}}}\cdot 2^{n_{d_i}}}{2^{n_{d_{i-j}}}\cdot p\cdot 2^{n_{d_i}+n}\cdot 2^{n_{d_{i-j+1}}}\cdot 4}\ge\frac{2^{n_{c_{i-j}}}}{2^{n_{d_{i-j}}+n}\cdot 4p}.$$

Then by condition $(a(2(i-j)+1))$

$$\left(1+\frac{2}{\beta(k_r)}\right)\le 1+\frac{2^{n_{d_{i-j}}+n}\cdot 4p}{2^{n_{c_{i-j}}}}\le\alpha_{2(i-j)+1},$$

$$\left(1-\frac{2}{\beta(k_r)}\right)\ge 1-\frac{2^{n_{d_{i-j}}}\cdot p}{2^{n_{c_{i-j}}+n}\cdot 4}\ge\frac{1}{\alpha_{2(i-j)+1}}.$$

We see that

$$\frac{\Theta(A)}{2^{n_{d_i}-n_{d_{i-j}}}}\cdot\prod_{t=2(i-j)+1}^{2i-1}\frac{1}{\alpha_t}\le\frac{\Theta(Y_{k_r}^{c_{i-j}})}{\beta(k_r)}\le\frac{\Theta(A)}{2^{n_{d_i}-n_{d_{i-j}}}}\cdot\prod_{t=2(i-j)+1}^{2i-1}\alpha_t.$$

Now consider the set $Y_{k_r}^{c_{i-j}}$ and $\beta(k_r)$. The sets $X_{o_1}^{n_{d_{i-j}}},\dots,X_{o_{\beta(k_r)}}^{n_{d_{i-j}}}$ are mapped to the set $Y_{k_r}^{c_{i-j}}$. Represent the set $Y_{k_r}^{c_{i-j}}$ as the disjoint union of sets

$$Y_{q_1}^{c_{i-j-1}}\cup\dots\cup Y_{q_l}^{c_{i-j-1}}.$$

Now map them into the sets $X_{o_1}^{n_{d_{i-j}}},\dots,X_{o_{\beta(k_r)}}^{n_{d_{i-j}}}$ to minimize the difference of $\Theta(A_k^j)$, where $A_k^j = f^{-1}(X_k^{n_{d_{i-j}}})$.

This can be done so that

$$\frac{\Theta(Y_{k_r}^{c_{i-j}})}{\beta(k_r)}-\Theta_{\max}^{c_{i-j-1}}\le\Theta(A_k^j)\le\frac{\Theta(Y_{k_r}^{c_{i-j}})}{\beta(k_r)}+\Theta_{\max}^{c_{i-j-1}}.$$

We see that

$$\frac{\Theta(Y_{k_r}^{c_{i-j}})}{\beta(k_r)}\ge p\cdot 2^{n_{d_{i-j}}}\cdot\frac{1}{2}\ge 2^{n_{d_{i-j}}-1},$$

then by condition $(a(2(i-j)))$

$$\frac{\Theta(Y_{k_r}^{c_{i-j}})}{\beta(k_r)}+\Theta_{\max}^{c_{i-j-1}}\le\frac{\Theta(Y_{k_r}^{c_{i-j}})}{\beta(k_r)}\cdot\alpha_{2(i-j)},$$

$$\frac{\Theta(Y_{k_r}^{c_{i-j}})}{\beta(k_r)}\cdot\frac{1}{\alpha_{2(i-j)}}\le\frac{\Theta(Y_{k_r}^{c_{i-j}})}{\beta(k_r)}-\Theta_{\max}^{c_{i-j-1}}.$$

Thus,

$$\frac{\Theta(A)}{2^{n_{d_i}-n_{d_{i-j}}}}\cdot\prod_{t=2(i-j)}^{2i-1}\frac{1}{\alpha_t}\le\Theta(A_k^j)\le\frac{\Theta(A)}{2^{n_{d_i}-n_{d_{i-j}}}}\cdot\prod_{t=2(i-j)}^{2i-1}\alpha_t.$$

Assume that $f(A_k^j) = X_k^{d_{i-j}}$, $f^{-1}(X_k^{d_{i-j}}) = A_k^j$. As a result the following condition $(f(i-j))$ holds:

$$\omega_f(a_{c_{i-j-1}})\le n_{d_{i-j}}\quad \omega_{f^{-1}}(n_{d_i-j})\le a_{c_{i-j}}.$$

After step $(i-1)$ we obtain our function. The set A is written as the union of the family of sets $\{A_k^{i-1}\}$. For every k

$$0 < p \cdot 2^{n_{d_1}} \leq \frac{\Theta(A)}{2^{n_{d_i}-n_{d_1}}} \cdot \prod_{t=2}^{2i-1} \frac{1}{\alpha_t} \leq \Theta(A_k^{i-1}),$$

therefore $A_k^{(i-1)}$ is nonempty. For every k and for every $x \in A_k^{(i-1)}$ let $f(A,B)(x) = X_k^{n_{d_1}}$.

Note, that the constructed function satisfies conditions $(f(1))$–$(f(i))$.

Step c). Now we have a sequence (f_i) of functions. We have to construct function from Y to X. We can write Y as the union of the sets

$$Y_1 = Y_1^{d_1}, \quad Y_i = (Y_1^{d_i} \cup \dots \cup Y_{2^n}^{d_i}) \setminus Y_{i-1}.$$

Let $X = X_1 \cup X_2 \cup \dots$, where $X_1 = X_1^{n_{d_1}}$, and $X_i = X_1^{n_{d_i}} \setminus X_1^{n_{d_{i-1}}}$ for $i \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$. For every i we have to map $(Y_1^{d_i} \setminus Y_1^{d_{i-1}})$ into X_i.

Consider step i. We see that $Y_i = Y_{l_1}^{d_{i-1}} \cup \dots \cup Y_{l_t}^{d_{i-1}}$. Also $2^{n_{d_i}+n} \leq \Theta(Y_i) \leq 2^{n_{d_i}+2n}$ and $2^{n_{d_{i-1}}} \leq \Theta(Y_j^{d_{i-1}}) \leq 2^{n_{d_{i-1}}+n}$. Then $2^{n_{d_i}-n_{d_{i-1}}} \leq t \leq 2^{n_{d_i}-n_{d_{i-1}}+2n}$.

We have $X_i = X_1^{n_{d_i}} \setminus X_1^{n_{d_{i-1}}} = X_{m_1}^{n_{d_{i-1}}} \cup \dots \cup X_{m_u}^{n_{d_{i-1}}}$. It is easy to see that $u = 2^{n_{d_i}-n_{d_{i-1}}} - 1$. Also $u < t < up'$.

Now we can write Y_i as the disjoint union of sets $Y_i = Y_{(i,1)} \cup \dots \cup Y_{(i,u)}$, where every $Y_{(i,k)}$ is the union of w sets of the family $(Y_{l_r}^{d_{i-1}})$, $1 \leq w \leq p'$.

Now for every $k \in \{1, \dots, u\}$ using the function $f_i(Y_{(i,k)}, X_{m_k}^{n_{d_{i-1}}})$ we shall map the set $Y_{(i,k)}$ into the set $X_{m_k}^{n_{d_{i-1}}}$. □

The last theorem can be reformulated.

Theorem 2. *A metric space (Y,ρ) is coarsely equivalent to the macro-Cantor set if and only if there exist numbers $a > 0$, $n \in \mathbb{N}$ and monotonically increasing divergent sequences $(a_i)_{i\in\mathbb{N}}$, $(n_i)_{i\in\mathbb{N}}$ of real and natural numbers respectively, such that the following holds: for every i the set Y can be written as the disjoint union of a countable family of sets $\{Y_j\}_{j\in\mathbb{N}}$, such that for every $j,k \in \mathbb{N}$, $\operatorname{diam}(Y_j) \leq a_i$, $\operatorname{dist}(Y_j, Y_k) > a_{i-1}$ and the set Y_j can be covered by $n \cdot n_i$ sets and cannot be covered by less than n_i sets of diameter not exceeding a.*

Now using Theorem 2 we can prove its more general version.

Theorem 3. *A metric space (Y,ρ) is coarsely equivalent to the macro-Cantor set if and only if there exist monotonically increasing divergent sequences $(a_i)_{i\in\mathbb{N}\cup\{0\}}$ of reals, $(n_i)_{i\in\mathbb{N}}$ and $(m_i)_{i\in\mathbb{N}}$ of naturals, such that the following holds: for every i the set Y can be written as the disjoint union of a countable family of sets $\{Y_j\}_{j\in\mathbb{N}}$, such that for every $j,k \in \mathbb{N}$ $\operatorname{diam}(Y_j) \leq a_i$, $\operatorname{dist}(Y_j, Y_k) > a_{i-1}$ and the set Y_j can be covered by m_i sets and cannot be covered by less than n_i sets of diameter not exceeding a_0.*

Proof. To prove this theorem we will show that for the space Y the conditions from Theorem 2 hold true. We will construct monotonically increasing sequences $(b_i)_{i\in\mathbb{N}}$ and (k_i) of real and natural numbers respectively, such that for all $i \in \mathbb{N}$ the set Y can be written as disjoint union of a countable family of sets $\{Z_j^i\}_{j\in\mathbb{N}}$, such that for all $j,l \in \mathbb{N}$ $\operatorname{diam}(Z_j^i) \leq b_i$, $\operatorname{dist}(Z_j^i, Z_l^i) > b_{i-1}$ and the set Z_j^i can be covered by k_i sets and cannot be covered by less than $k \cdot k_i$ sets of diameter not exceeding $b_0 = a_0$.

By the formulation of the theorem, for all $i \in \mathbb{N}$ set Y can be written as disjoint union of a countable family of sets which we will denote by $\{Y_j^i\}_{j\in\mathbb{N}}$.

Define $k = \max\{3, [\frac{m_1}{n_1}] + 1\}$.

Base of induction. Put $b_1 = a_1$, $k_1 = n_1$, $t_1 = 1$. For all $j \in \mathbb{N}$, let $Z_j^1 = Y_j^1$. It is easy to see that, for the family $\{Z_j^1\}_{j\in\mathbb{N}}$, all conditions hold.

i-th step of induction, $i > 1$. We have a natural number t_{i-1} and a real number b_{i-1} such that $b_{i-1} = a_{t_{i-1}}$. We have to find numbers $b_i > b_{i-1}$ and k_i, and write Y as disjoint union of a countable family of sets $\{Z_j^i\}_{j\in\mathbb{N}}$, such that for all $j,l \in \mathbb{N}$ $\operatorname{diam}(Z_j^i) \leq b_i$, $\operatorname{dist}(Z_j^i, Z_l^i) > b_{i-1}$ and the set Z_j^i can be covered by $k \cdot k_i$ sets and cannot be covered by less than k_i sets of diameter b_0.

Consider the family of sets $\{Y_j^{t_{i-1}+1}\}_{j\in\mathbb{N}}$. The mutual distances between the distinct elements of this family are at least $a_{t_{i-1}}$. Every of these sets can be covered by $n_{t_{i-1}+1}$ sets and cannot be covered by less than $m_{t_{i-1}+1}$ sets of diameter not exceeding b_0. Put $k_i = m_{t_{i-1}+1}$.

Take a number t_i, such that $n_{t_i} > m_{t_{i-1}+1}$. Consider the family of sets $\{Y_j^{t_i}\}_{j\in\mathbb{N}}$. The diameter of each of them is less than a_{t_i}. Put $b_i = a_{t_i}$. Each of them can be covered by m_{t_i} and cannot be covered by less than n_{t_i} of sets of diameter b_0.

For all $u \in \mathbb{N}$ consider the set $Y_u^{t_i}$. This set can be represented as disjoint union of a finite number of sets from the family $\{Y_j^{t_{i-1}+1}\}_{j\in\mathbb{N}}$. Without loss of generality we can write $Y_u^{t_i} = Y_1^{t_{i-1}+1} \cup Y_2^{t_{i-1}+1} \cup \dots \cup Y_v^{t_{i-1}+1}$. Each of the sets $Y_p^{t_{i-1}+1}$, $p \in \{1, \dots, v\}$, can be covered by $m_{t_{i-1}+1}$ sets of diameter b_0. The set $Y_u^{t_i}$ cannot be covered by less than $n_{t_i} > m_{t_{i-1}+1}$ sets of diameter b_0.

Put $p_0 = 0$. There exist numbers $p_1, p_2, \dots, p_q$, $0 = p_0 < p_1 < p_2 < \dots < p_q < v$, such that the sets $Y_{p_{l-1}+1}^{t_{i-1}+1} \cup Y_{p_{l-1}+2}^{t_{i-1}+1} \cup \dots \cup Y_{p_l}^{t_{i-1}+1}$ can be covered by $2 \cdot m_{t_{i-1}+1}$ and cannot be covered by less than $m_{t_{i-1}+1}$ sets, and the set $Y_{p_q+1}^{t_{i-1}+1} \cup Y_{p_q+2}^{t_{i-1}+1} \cup \dots \cup Y_v^{t_{i-1}+1}$ can be covered by $m_{t_{i-1}+1}$ sets of diameter b_0. Then define

$$Z_{u1}^i = Y_1^{t_{i-1}+1} \cup Y_2^{t_{i-1}+1} \cup \dots \cup Y_{p_1}^{t_{i-1}+1},$$

$$Z_{u2}^i = Y_{p_1+1}^{t_{i-1}+1} \cup Y_{p_1+2}^{t_{i-1}+1} \cup \dots \cup Y_{p_2}^{t_{i-1}+1},$$

$$\dots$$

$$Z_{u,(q-1)}^i = Y_{p_{q-2}+1}^{t_{i-1}+1} \cup Y_{p_{q-2}+2}^{t_{i-1}+1} \cup \dots \cup Y_{p_{q-1}}^{t_{i-1}+1},$$

$$Z_{u,(q)}^i = Y_{p_{q-1}+1}^{t_{i-1}+1} \cup Y_{p_{q-1}+2}^{t_{i-1}+1} \cup \dots \cup Y_{p_q}^{t_{i-1}+1} \cup Y_{p_q+1}^{t_{i-1}+1} \cup \dots \cup Y_u^{t_{i-1}+1}.$$

Put $u' = q$.

It is easy to see that the sets Z_{ur}^i, $r \in \{1, \dots, q-1\}$, can be covered by $2 \cdot m_{t_{i-1}+1} \leq k \cdot k_i$ sets and cannot be covered by less than $m_{t_{i-1}+1} = k_i$ sets of diameter b_0. The set Z_{uq}^i cannot be covered by less than $m_{t_{i-1}+1} = k_i$, can be covered by $3 \cdot m_{t_{i-1}+1} \leq k \cdot k_i$ sets of diameter b_0. Also the diameters of these sets are less than $a_{t_i} = b_i$, and their pairwise distances are less than $a_{t_{i-1}} = b_{i-1}$.

So we represent the set Y as disjoint union of a countable family of sets, $Y = \bigcup\{Z^i_{p,q} | p \in \mathbb{N}, q = 1, \dots, p'\}$, for which all conditions are true. Now we can enumerate these sets by naturals and we shall represent Y as the disjoint union of the family $\{Z^i_j\}_{j\in\mathbb{N}}$. □

Definition 2. *A metric space (X, d) is called* asymptotically zero-dimensional *if for all $a > 0$ there exists a uniformly bounded a-disjoint cover of X.*

A cover $\mathcal{U}$ of metric space X is called

- *uniformly bounded* if its mesh $\sup\{\operatorname{diam} U : U \in \mathcal{U}\}$ is finite.
- *a-disjoint* if $\operatorname{dist}(A, B) > a$ for every $A, B \in \mathcal{U}$.

Theorem 4. *A metric asymptotically zero-dimensional space (X, ρ) is coarsely equivalent to macro-Cantor set if and only if there exists number $a > 0$, and the following conditions are true:*

1) for every $n \in \mathbb{N}$ there exists $r \in \mathbb{N}$, such that for any $x \in X$ the r-ball $U_r(x)$ cannot be covered by less than n balls of radius a,

2) for every $r \in \mathbb{N}$ there exists $m \in \mathbb{N}$, such that each r-ball $U_r(x)$ can be covered by m balls of radius a.

Proof. Necessity. By the Theorem 3 there exist monotonically increasing sequences $(a_i)_{i\in\mathbb{N}\cup\{0\}}$ of reals, $(n_i)_{i\in\mathbb{N}}$ and $(m_i)_{i\in\mathbb{N}}$ of natural numbers. Put $a = a_0$. We will show that conditions 1) and 2) are true.

a) Consider an arbitrary natural n. Then there exists j, such that $n_j > n$. Put $d = a_{j+1}$. It is easy to see that condition 1) is true.

b) Consider an arbitrary number d. Then there exists such j, that $a_j > d$. Put $m = m_{j+1}$. Easy to see that condition 2) is true.

Sufficiency. Suppose that (X, ρ) is a space and conditions 1) and 2) are true. We shall construct by induction monotonically increasing sequences $(a_i)_{i\in\mathbb{N}\cup\{0\}}$ of real, $(n_i)_{i\in\mathbb{N}}$ and $(m_i)_{i\in\mathbb{N}}$ of natural numbers to satisfy conditions of the Theorem 3.

Base of induction. Put $a_0 = a$, $m_0 = 1$.

i-th step of induction, $i \in \mathbb{N}$. Put $n_i = m_{i-1} + 1$. By condition 1) for number n_i there exists d. By definition of asymptotic dimension zero, for the space X there exists a totally bounded a_{i-1}-disjoint cover. Let b be the mesh of this cover. Put $a_i = \max\{b, d, a_{i-1} + 1\}$.

It is easy to see that this sequence satisfies the conditions of the Theorem 3. □

It is well known that every zero-dimensional compact metric space without isolated points is homeomorphic to the Cantor set. In our characterization the first condition is an analogue of "space without isolated points" in metric geometry.

Applying Characterization Theorem 4 one can easily prove the next corollary.

Corollary 1. *For every $n \in \mathbb{N}$ the hyperspace $\exp_n(2^{<\mathbb{N}})$ is coarsely equivalent to $2^{<\mathbb{N}}$.*

Here for a metric space Y by $\exp_n(Y)$ we denote the space of all at most n-element non-empty subsets of Y endowed with the Hausdorff distance

$$\rho_H(A, B) = \inf\{\varepsilon > 0 : A \subset U_\varepsilon(B), B \subset U_\varepsilon(A)\}.$$

REFERENCES

1. Dranishnikov A., Zarichnyi M. *Universal spaces for asymptotic dimension*, Topol. Appl., **140**, no.2-3 (2004), 203–225.
2. Roe J. Lectures in Coarse Geometry, University Lecture Series Vol. 31, American Mathematical Society: Providence, Rhode Island, 2003.
3. Engelking R. General Topology, PWN, Warsaw, 1977.

Institute for Applied Problems of Mechanics and Mathematics,
Lviv, Ukraine

Received 22.10.2010

Зарічний І.М. *Характеризація макро-канторової множини з точністю до грубої еквівалентності* // Карпатські математичні публікації. — 2010. — Т.2, №2. — С. 39–47.

Наведено характеризацію метричних просторів, грубо еквівалентних до макроканторової множини $2^{<\mathbb{N}}$.

Заричный И.М. *Характеризацыя макро-канторового множества с точностью до грубой еквивалентности* // Карпатские математические публикации. — 2010. — Т.2, №2. — С. 39–47.

Приводится характеризиризацыя метрических пространств, грубо еквивалентных макроканторову множеству $2^{<\mathbb{N}}$.

Карпатські математичні публікації. Т.2, №2

Carpathian Mathematical Publications. V.2, №2

УДК 517.948:517.946

Копач М.І., Обшта А.Ф., Шувар Б.А.

ЗАСТОСУВАННЯ АНАЛОГІВ ДВОСТОРОННІХ МЕТОДІВ КУРПЕЛЯ ДО ЗВИЧАЙНИХ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНИХ РІВНЯНЬ

Копач М.І., Обшта А.Ф., Шувар Б.А. *Застосування аналогів двосторонніх методів Курпеля до звичайних диференціальних рівнянь* // Карпатські математичні публікації. — 2010. — Т.2, №2. — С. 48–54.

Побудовано і досліджено аналоги двосторонніх методів Курпеля наближеного розв'язування звичайних диференціальних рівнянь, які дозволяють отримувати надлінійну збіжність у випадку недиференційовної правої частини.

Вступ

Застосування двосторонніх наближених методів на практиці часто утруднене через те, що в теорії двосторонніх монотонних методів фігурують вимоги про монотонність та про опуклість операторів у відповідних рівняннях. Істотний вклад М.С. Курпеля в теорію двосторонніх методів стосується побудови таких нових двосторонніх методів, обґрунтування яких не потребує монотонності і опуклості правих частин вихідних рівнянь. Двосторонні методи Курпеля зберігають найважливіші властивості методу Чаплигіна (див. [2, 3]). В [7] започатковано ідею врахування збурень у правих частинах лінеаризованих додатків методів Курпеля і Чаплигіна таким способом, що пропоновані алгоритми окреслюють також і стратегію врахування похибок заокруглення зі збереженням двосторонньої монотонності апроксимації розв'язку рівняння і квадратичної швидкості збіжності ітерацій до розв'язку. У цьому повідомленні досліджені аналоги двосторонніх методів Курпеля у застосуванні до задачі Коші

$$x'(t) = g(t, x(t)) - h(t, x(t)), \tag{1}$$

$$x(t_0) = x_0. \tag{2}$$

Основна ідея пропонованих алгоритмів полягає у поширенні зініційованого М.С. Курпелем в [3] підходу до рівняння (1) таким способом, щоб вони були застосовними до рівняння вигляду (1) з неопуклою правою частиною, яка не обов'язково є диференційовною.

2000 *Mathematics Subject Classification:* 34A45.

Ключові слова і фрази: двосторонні методи, часткова ліпшицієвість, неперервна дифренційовність.

1 Постановка задачі

В задачі (1), (2) будемо вважати $g(t, x(t)), h(t, x(t))$ дійсними неперервними функціями при $t \in [t_0, T]$, $x \in S(x_0, M) = \{x | |x - x_0| \le M, x \in R^1\}$ (R^1 — множина дійсних чисел). Шукатимемо розв'язок задачі (1), (2) у класі неперервно диференційовних на $[t_0, T]$ функцій.

Умовою B_1 назвемо припущення про існування таких неперервних при $t \in [t_0, T]$, $y, z \in S(x_0, M)$ функцій $a_1(t, y, z)$, $\alpha_1(t, y, z)$, $b_1(t, y, z)$, $\beta_1(t, y, z)$, для яких із співвідношень $t \in [t_0, T]$, $y, z \in S(x_0, M)$ випливає:

$$(a_1(t, y, z) + \alpha_1(t, y, z))(z - y) \le g(t, z) - g(t, y), \tag{3}$$

$$(b_1(t, y, z) + \beta_1(t, y, z))(z - y) \le h(t, z) - h(t, y).$$

При цьому функції $a_1(t, y, z)$, $\alpha_1(t, y, z)$, $b_1(t, y, z)$, $\beta_1(t, y, z)$ не спадають по y, не зростають по z і $a_1(t, y, z) \ge 0$, $\alpha_1(t, y, z) \ge 0$, $b_1(t, y, z) \ge 0$, $\beta_1(t, y, z) \ge 0$.

Умову (3) будемо називати частковою ліпшицієвістю. Вважатимемо заданими неперервно диференційовні функції $u(t), v(t)$, для яких

$$u(t_0) \le x_0 \le v(t_0) \quad (t \in [t_0, T]), \tag{4}$$

$$u(t) \le v(t), \tag{5}$$

$$u'(t) \le g(t, u(t)) - h(t, v(t)), \tag{6}$$

$$v'(t) \ge g(t, v(t)) - h(t, u(t)) \quad (t \in [t_0, T]),$$

причому $u(t), v(t) \in S(x_0, M)$ при $t \in [t_0, T]$. Позначатимемо $[u(t), v(t)] = \{x(t) | u(t) \le x(t) \le v(t)\}$. Побудуємо ітераційний процес за допомогою формул

$$y_0(t) = u(t), z_0(t) = v(t) \tag{7}$$

$$y'_{n+1}(t) = a_1(t, y_n(t), z_n(t))(y_{n+1}(t) - y_n(t)) -$$

$$b_1(t, y_n(t), z_n(t))(z_{n+1}(t) - z_n(t)) + g(t, y_n(t)) - h(t, z_n(t)), \tag{8}$$

$$z'_{n+1}(t) = (a_1(t, y_n(t), z_n(t)) + \alpha_1(t, y_n(t), z_n(t)))(z_{n+1}(t) - z_n(t)) -$$

$$(b_1(t, y_n(t), z_n(t)) + \beta_1(t, y_n(t), z_n(t)))(y_{n+1}(t) - y_n(t)) + g(t, z_n(t)) - h(t, y_n(t)),$$

$$y_{n+1}(t_0) = z_{n+1}(t_0) = x_0. \tag{9}$$

Теорема 1. *Нехай справджується умова B_1 і задані функції $u(t), v(t)$ задовольняють співвідношення (4)–(6). Тоді для ітераційного процесу (7)–(9) мають місце співвідношення*

$$y_n(t) \le y_{n+1}(t) \le z_{n+1}(t) \le z_n(t), \tag{10}$$

де $n = 0, 1, ..., t \in [t_0, T]$

Доведення. Формули (7) і нерівність (5) означають, що $y_0(t) \le z_0(t)$. Із (6) та (8) для $n = 0$ випливає, що

$$y_1'(t) - y_0'(t) \ge a_1(t, y_0(t), z_0(t))(y_1(t) - y_0(t)) + b_1(t, y_0(t), z_0(t))(z_0(t) - z_1(t)),$$

$$z_0'(t) - z_1'(t) \ge (a_1(t, y_0(t), z_0(t)) + \alpha_1(t, y_0(t), z_0(t)))(z_0(t) - z_1(t)) + (b_1(t, y_0(t), z_0(t))+ \beta_1(t, y_0(t), z_0(t)))(y_1(t) - y_0(t)).$$

Звідси за теоремою про диференціальні нерівності [2] маємо, що при $t \in [t_0, T]$

$$y_1(t) \ge y_0(t), \quad z_1(t) \le z_0(t).$$

Крім того, з (8) та (3) випливає

$$\begin{gathered} z_1'(t) - y_1'(t) = (a_1(t, y_0(t), z_0(t)) + b_1(t, y_0(t), z_0(t)))(z_1(t) - y_1(t))- \\ (a_1(t, y_0(t), z_0(t)) + b_1(t, y_0(t), z_0(t)))(z_0(t) - y_0(t))- \\ \alpha_1(t, y_0(t), z_0(t))(z_0(t) - z_1(t)) - \beta_1(t, y_0(t), z_0(t))(y_1(t) - y_0(t)) + g(t, z_0(t))- \\ g(t, y_0(t)) + h(t, z_0(t)) - h(t, y_0(t)) \ge \\ (a_1(t, y_0(t), z_0(t)) + b_1(t, y_0(t), z_0(t)) + \alpha_1(t, y_0(t), z_0(t)) + \beta_1(t, y_0(t), z_0(t)))(z_1(t) - y_1(t))+ \\ \alpha_1(t, y_0(t), z_0(t))(y_1 - y_0) + \beta_1(t, y_0(t), z_0(t))(z_0(t) - z_1(t)) \ge \\ (a_1(t, y_0(t), z_0(t)) + b_1(t, y_0(t), z_0(t)) + \alpha_1(t, y_0(t), z_0(t))+ \\ \beta_1(t, y_0(t), z_0(t)))(z_1(t) - y_1(t)). \end{gathered}$$

Знову скориставшись теоремою про диференціальні нерівності, робимо висновок, що при $t \in [t_0, T]$

$$y_1(t) \le z_1(t).$$

Отже, співвідношення (10) доведені для $n = 0$. Припускаючи їх справедливість при $n = k - 1$, при $n = k$ із (8), (9) та умови B_1 маємо:

$$\begin{gathered} y_{k+1}'(t) - y_k'(t) = g(t, y_k(t)) - g(t, y_{k-1}(t)) + h(t, z_{k-1}(t)) - h(t, z_k(t))+ \\ a_1(t, y_k(t), z_k(t))(y_{k+1}(t) - y_k(t)) + b_1(t, y_k(t), z_k(t))(z_k(t) - z_{k+1}(t))- \\ a_1(t, y_{k-1}(t), z_{k-1}(t))(y_k(t) - y_{k-1}(t)) - b_1(t, y_{k-1}(t), z_{k-1}(t))(z_{k-1}(t) - z_k(t)) \ge \\ a_1(t, y_{k-1}(t), y_k(t)) + \alpha_1(t, y_{k-1}(t), y_k(t))(y_k(t) - y_{k-1}(t))+ \\ b_1(t, z_k(t), z_{k-1}(t)) + \beta_1(t, z_k(t), z_{k-1}(t))(z_{k-1}(t) - z_k(t))+ \\ a_1(t, y_k(t), z_k(t))(y_{k+1}(t) - y_k(t)) + b_1(t, y_k(t), z_k(t))(z_k(t) - z_{k+1}(t))- \\ a_1(t, y_{k-1}(t), z_{k-1}(t))(y_k(t) - y_{k-1}(t)) - b_1(t, y_{k-1}(t), z_{k-1}(t))(z_{k-1}(t) - z_k(t)) \ge \\ a_1(t, y_k(t), z_k(t))(y_{k+1}(t) - y_k(t)) + b_1(t, y_k(t), z_k(t))(z_k(t) - z_{k+1}(t)), \end{gathered}$$

$$\begin{gathered} z_k'(t) - z_{k+1}'(t) = g(t, z_{n-1}(t)) - g(t, z_n(t)) + h(t, y_n(t)) - h(t, y_{n-1}(t))+ \end{gathered}$$

$$\begin{gathered} (a_1(t, y_k(t), z_k(t)) + \alpha_1(t, y_k(t), z_k(t)))(z_k(t) - z_{k+1}(t))+ \\ (b_1(t, y_k(t), z_k(t)) + \beta_1(t, y_k(t), z_k(t)))(y_{k+1}(t) - y_k(t))- \\ (a_1(t, y_{k-1}(t), z_{k-1}(t)) + \alpha_1(t, y_{k-1}(t), z_{k-1}(t)))(z_{k-1}(t) - z_k(t))- \\ (b_1(t, y_{k-1}(t), z_{k-1}(t)) + \beta_1(t, y_{k-1}(t), z_{k-1}(t)))(y_k(t) - y_{k-1}(t)) \ge \\ (a_1(t, y_k(t), z_k(t)) + \alpha_1(t, y_k(t), z_k(t)))(z_k(t) - z_{k+1}(t))+ \\ (b_1(t, y_k(t), z_k(t)) + \beta_1(t, y_k(t), z_k(t)))(y_{k+1}(t) - y_k(t)), \end{gathered}$$

$$\begin{gathered} z_{k+1}'(t) - y_{k+1}'(t) = g(t, z_n(t)) - g(t, y_n(t)) + h(t, z_n(t)) - h(t, y_n(t))- \\ \alpha_1(t, y_k(t), z_k(t))(z_k(t) - z_{k+1}(t)) - \beta_1(t, y_k(t), z_k(t))(y_{k+1}(t) - y_k(t))+ \\ (a_1(t, y_n(t), z_n(t)) + b_1(t, y_n(t), z_n(t)))(z_{n+1}(t) - y_{n+1}(t))- \\ (a_1(t, y_n(t), z_n(t)) + b_1(t, y_n(t), z_n(t)))(z_n(t) - y_n(t)) \ge \\ (a_1(t, y_k(t), z_k(t)) + b_1(t, y_k(t), z_k(t)) + \alpha_1(t, y_k(t), z_k(t))+ \\ \beta_1(t, y_k(t), z_k(t)))(z_{k+1}(t) - y_{k+1}(t)). \end{gathered}$$

З отриманих співвідношень, враховуючи теорему про диференціальні нерівності, одержуємо, що

$$y_{k+1}(t) - y_k(t) \ge 0, \quad z_k(t) - z_{k+1}(t) \ge 0, \quad z_{k+1}(t) - y_{k+1}(t) \ge 0.$$

Це означає, що нерівності (10) виконуються і при $n = k$. Згідно з принципом математичної індукції, теорему вважаємо доведеною. □

При виконанні умов теореми можна гарантувати збіжність ітераційного процесу (7)–(9) до неперервно диференційовних компонент $y(t), z(t)$ розв'язку $(y(t), z(t))$ системи рівнянь

$$y'(t) = g(t, y(t)) - h(t, z(t)), \tag{11}$$

$$z'(t) = g(t, z(t)) - h(t, y(t))$$

з початковою умовою

$$y(t_0) = z(t_0) = x_0. \tag{12}$$

Точніше, послідовності $\{y_n(t)\}$ та $\{z_n(t)\}$, утворені за допомогою ітераційного процесу (7)–(9), збігаються рівномірно, монотонно не спадаючи до $y(t)$ та монотонно не зростаючи до $z(t)$ неперервно диференційовних на $[t_0, T]$ компонент розв'язку $(y(t), z(t))$ задачі (11), (12). Це випливає з рівномірної обмеженості і рівностепеневої неперервності послідовностей $\{y_n(t)\}$, $\{z_n(t)\}$ та з їх монотонності. Однак умови теореми не забезпечують, взагалі кажучи, збіжності кожної з цих послідовностей або однієї з них до розв'язку задачі (1), (2).

Теорема 2. *Нехай справджуються умови теореми (1) і, крім того, задача (11), (12) має єдиний неперервно диференційовний на $[t_0, T]$ розв'язок $(y(t), z(t))$. Тоді для єдиного неперервно диференційовного на $[t_0, T]$ розв'язку $x(t)$ задачі (1), (2) та послідовностей $\{y_n(t)\}$ та $\{z_n(t)\}$, утворених за допомогою формул (7)–(9), при $n = 0, 1, ..., t \in [t_0, T]$ мають місце співвідношення*

$$y_n(t) \leq y_{n+1}(t) \leq x(t) \leq z_{n+1}(t) \leq z_n(t),$$

причому ці послідовності рівномірно збігаються до $x(t)$ на $[t_0, T]$, відповідно не спадаючи та не зростаючи.

Доведення. Оскільки $(y(t), z(t))$ є розв'язками задачі (11), (12) і розв'язком цієї задачі є також пара $(x(t), x(t))$, то з попереднього зауваження і з існування розв'язку $x(t)$ задачі (1), (2) випливає, що $y(t) = z(t) = x(t)$. Тому можна вважати теорему доведеною. □

Для отримання оцінок збіжності процесу (7)–(9) умов попередніх двох теорем, зокрема, часткової ліпшицевості (3) правої частини рівняння (1) недостатньо.

Умовою B_2 назвемо припущення про те, що при $t \in [t_0, T]$, $y \leq z$, $y, z \in S(x_0, M)$ справджуються нерівності

$$g(t, z) - g(t, y) \leq (a_1(t, y, z) + \alpha_2(t, y, z))(z - y),$$

$$h(t, z) - h(t, y) \leq (b_1(t, y, z) + \beta_2(t, y, z))(z - y)$$

з тими ж самими функціями $a_1(t, y, z)$, $b_1(t, y, z)$, які фігурують в умові B_1 й неперервними невід'ємними функціями $\alpha_2(t, y, z))$, $\beta_2(t, y, z)$.

Теорема 3. *Нехай виконуються умови B_1 та B_2 і функції $y_n(t), z_n(t)$ при $n = 0, 1, ...$ задовольняють співвідношення (7)–(9). Тоді при $n = 0, 1, ..., t \in [t_0, T]$ мають місце оцінки*

$$z'_{n+1}(t) - y'_{n+1}(t) \leq f_n^{(2)}(t)(z_{n+1}(t) - y_{n+1}(t)) + f_n^{(1)}(t)(z_n(t) - y_n(t)), \tag{13}$$

та

$$z_{n+1}(t) - y_{n+1}(t) \leq \int_{t_0}^{t} f_n^{(1)}(s) \exp \int_s^t f_n^{(2)}(\xi) d\xi (z_n(s) - y_n(s)) ds, \tag{14}$$

де

$$f_n^{(1)}(t) = \alpha_2(t, y_n(t), z_n(t)) + \beta_2(t, y_n(t), z_n(t)), \tag{15}$$
$$f_n^{(2)}(t) = \alpha_1(t, y_n(t), z_n(t)) + \beta_1(t, y_n(t), z_n(t))$$

Доведення. Із (7)–(10) та з умови B_2 випливає, що

$$z'_{n+1}(t) - y'_{n+1}(t) = g(t, z_n(t)) - g(t, y_n(t)) + h(t, z_n(t)) - h(t, y_n(t)) -$$
$$\alpha_1(t, y_n(t), z_n(t))(z_n(t) - z_{n+1}(t)) - \beta_1(t, y_n(t), z_n(t))(y_{n+1}(t) - y_n(t)) +$$
$$(a_1(t, y_n(t), z_n(t)) + b_1(t, y_n(t), z_n(t)))(z_{n+1}(t) - y_{n+1}(t)) -$$
$$(a_1(t, y_n(t), z_n(t)) + b_1(t, y_n(t), z_n(t)))(z_n(t) - y_n(t)) \leq$$

$$(a_1(t, y_n(t), z_n(t)) + \alpha_2(t, y_n(t), z_n(t))(z_n(t) - y_n(t)) +$$
$$(b_1(t, y_n(t), z_n(t)) + \beta_2(t, y_n(t), z_n(t)))(z_n(t) - y_n(t)) +$$
$$(a_1(t, y_n(t), z_n(t)) + b_1(t, y_n(t), z_n(t)))(z_{n+1}(t) - y_{n+1}(t)) -$$
$$(a_1(t, y_n(t), z_n(t)) + b_1(t, y_n(t), z_n(t)))(z_n(t) - y_n(t)) =$$
$$f_n^{(2)}(t)(z_{n+1}(t) - y_{n+1}(t)) + f_n^{(1)}(t)(z_n(t) - y_n(t)),$$

тобто маємо оцінку (13). Оцінка (14) випливає з (13), якщо скористатись теоремою про диференціальні нерівності [6]. □

Зауваження 1.1. *Характер збіжності процесу (7)–(9) визначається структурою функцій $a_1(t, y, z)$, $b_1(t, y, z)$, $\alpha_2(t, y, z)$, $\beta_2(t, y, z)$. Якщо, зокрема,*

$$\alpha_2(t, y, z) = \alpha_3(t, y, z)(z - y)^\gamma, \quad \beta_2(t, y, z) = \beta_3(t, y, z)(z - y)^\gamma \quad (\gamma \geq 0),$$

де $\alpha_3(t, y, z), \beta_3(t, y, z)$ неперервні невід'ємні при $t \in [t_0, T], y \leq z, y, z \in S(x_0, M)$, то згідно з (14),

$$f_n^{(1)}(t) = (\alpha_3(t, y(t), z(t)) + \beta_3(t, y(t), z(t)))(z_n(t) - y_n(t))^\gamma. \tag{16}$$

Підставляючи (15) в (14), при $\gamma > 0$ для ітераційного процесу (7)–(9) отримуємо надлінійну збіжність, а при $\gamma = 1$ та $\gamma > 1$ ітераційний процес (7)–(9) характеризується квадратичною і, відповідно, надквадратичною збіжністю. У тому випадку, коли

$$a_1(t, y, z) = \frac{\partial g(t, y)}{\partial y}, \quad b_1(t, y, z) = \frac{\partial h(t, y)}{\partial y},$$

$$\alpha_2(t, y, z) = \frac{1}{2} \frac{\partial^2 g(t, y)}{\partial y^2}(z - y), \quad \beta_2(t, y, z) = \frac{1}{2} \frac{\partial^2 h(t, y)}{\partial y^2}(z - y),$$

матимемо квадратичну збіжність при $\gamma = 1$, і отримані результати охоплюють відповідні результати М.С. Курпеля із [2, 3]. Якщо, крім того, одна із функцій $g(t, x)$ або $h(t, x)$ тотожно дорівнює нулю, то результати, які отримуються із наведених теорем, описують основні властивості методу Чаплигіна і багатьох його різновидів.

Зауваження 1.2. *Відмінність алгоритму (7)–(9) від алгоритмів М.С. Курпеля з [2, 3] стосується можливості отримати надлінійну збіжність алгоритму для недиференційовних функцій $g(t, x)$ або $h(t, x)$.*

Література

1. Казімірський П.С. Розклад матричних многочленів на множники. – К.:Наукова думка, 1981. – 224с.
2. Канторович Л.В., Акилов Г.П. Функциональный анализ.– М: Наука, 1977.– 741 с.
3. Курпель М.С. *Про деякі модифікації методу С.О. Чаплигіна наближеного інтегрування диференціальних рівнянь* // Доп.АНУРСР. Сер.А. – 1996, №4.– С. 303-306.
4. Маршус А.С. Введение в спектральную теорию полиномиальных операторных пучков. – Кишинев: Штиинца, 1986. – 260 с.

5. Обшта А., Шувар Б. *Гіллясті дроби та ітераційні алгоритми для апроксимації коренів поліномів* // Обчислювальна математика і математичні проблеми механіки –2009.– С.294–295.
6. Рисс Ф. Секефальви-Надь Б. Лекции по функциональному анализу. – М: ЧЛ, 1954. – 589 с.
7. Рудин У. Функциональный анализ. – М: Мир, 1975. – 443 с.
8. Шувар Б.А., Шуляр М.А. *Про нулі полінома із коефіцієнтами із алгебри Банаха* // Вісник Львівського політехнічного інституту. Математика. Механіка. – Т.119 – 1977.
9. Kaczorek T. Polinomial and rational matrices. Applications in dynamical systems theory, Springer: Communications and Control Engineering.Dordrecht, 2007 – 503 p.

Прикарпатський національний університет ім. В. Стефаника,

Івано-Франківськ, Україна

Надійшло 06.10.2010

Kopach M.I., Obshta A.F., Shuvar B.A. *An application of analogues of two-sided Kurpel's methods to ordinary differential equation*, Carpathian Mathematical Publications, **2**, 2 (2010), 48–54.

An analogues of two-sided Kurpel's methods of approximate solution of ordinary differential equation that give possibility to get above-linear convergence in the case of nondifferential right part are constructed and investigated.

Копач М.И., Обшта А.Ф., Шувар Б.А. *Применение аналогов двусторонних методов Курпеля к обыкновеным дифференциальным уравнениям* // Карпатские математические публикации. — 2010. — Т.2, №2. — С. 48–54.

Построены и иследованы аналоги двусторонних методов Курпеля приближенного решения обыкновенных дифференциальных уравнений, которые позволяют получать скорость сходимости выше линейной в случае недифференцируемой правой части.

Карпатські математичні публікації. Т.2, №2

Carpathian Mathematical Publications. V.2, №2

УДК 517.956.4

Копитко Б.І., Мильо О.Я., Цаповська Ж.Я.

ПАРАБОЛІЧНА ЗАДАЧА СПРЯЖЕННЯ ІЗ ЗАГАЛЬНИМИ КРАЙОВОЮ УМОВОЮ ТА УМОВОЮ СПРЯЖЕННЯ ТИПУ ВЕНТЦЕЛЯ

Копитко Б.І., Мильо О.Я., Цаповська Ж.Я. *Параболічна задача спряження із загальними крайовою умовою та умовою спряження типу Вентцеля* // Карпатські математичні публікації. — 2005. — Т.2, №2. — С. 55–73.

У статті розглядається питання про існування у класі Гельдера розв'язку початково-крайової задачі для лінійного параболічного рівняння другого порядку з розривними коефіцієнтами з крайовою умовою та умовою спряження, які, як і рівняння в області, визначаються лінійними параболічними операторами другого порядку.

У цій праці за допомогою методу параболічних потенціалів досліджується питання про класичну розв'язність у класі Гельдера параболічної задачі спряження з припущенням, що на внутрішній і зовнішній межі області з класу Гельдера $H^{2+\lambda}$ задані умова спряження та крайова умова типу Вентцеля. Зауважимо, що задачі з крайовим оператором другого порядку еліптичного та параболічного типів для параболічних рівнянь другого порядку виникають в теорії випадкових процесів при вивченні задачі про "склеювання"дифузійних процесів [3, 8].

У такій постановці сформульована нами задача вивчається уперше. Раніше подібні задачі вивчалися методом потенціалу в роботах [10] – [13]. В [1] і [15] початково-крайова задача Вентцеля вивчалася за допомогою інших методів, а в монографіях [4, 5, 7] для параболічних крайових задач розгорнуто загальну теорію.

1 Основні позначення та деякі означення

Нехай $\mathbb{R}^n$, $n \geqslant 2$, — n-вимірний евклідів простір; $\mathbb{R}^{n+1}_T = \mathbb{R}^n \times (0,T)$, $T > 0$ — фіксоване; $\mathbb{R}^n_T = \mathbb{R}^{n-1} \times (0,T)$; $x = (x_1,\dots,x_{n-1},x_n) = (x',x_n)$ — точка в $\mathbb{R}^n$;

2000 *Mathematics Subject Classification:* 18B30, 54B30.
Ключові слова і фрази: клас Гельдера, початкова-крайова задача для лінійного параболічного рівняння другого порядку, лінійні параболічні операторами другого порядку.

$x' = (x_1, \dots, x_{n-1})$ — точка в $\mathbb{R}^{n-1}$; $(x,t) = (x', x_n, t)$ — точка в $\mathbb{R}^{n+1}_T$; (x', t) — точка в $\mathbb{R}^n_T$; $(x,y) = \sum\limits_{i=1}^{n} x_i y_i$; $|x|^2 = (x,x) = \sum\limits_{i=1}^{n} x_i^2$; $|x'|^2 = (x', x') = \sum\limits_{i=1}^{n-1} x_i^2$.

Розглянемо в $\mathbb{R}^n$ обмежену область $\mathcal{D}$ з гладкою межею S. Припустимо, що $\mathcal{D}$ розділена на дві області $\mathcal{D}_1$ і $\mathcal{D}_2$ поверхнею S_1, причому $S \cap S_1 = \varnothing$. Нехай при цьому $\mathcal{D}_1$ — підобласть з межею S_1, а $\mathcal{D}_2$ — підобласть з межею $S_2 = S \cup S_1$. Через $\nu(x) = (\nu_1(x), \dots, \nu_n(x))$ та $\nu^{(1)}(x) = (\nu_1^{(1)}(x), \dots, \nu_n^{(1)}(x))$ позначатимемо одиничні вектори внутрішніх нормалей по відношенню до області $\mathcal{D}_2$ в точках $x \in S$ та $x \in S_1$ відповідно. Покладемо $\overline{\mathcal{D}}_m = \mathcal{D}_m \cup S_m$, $\Omega_m = \mathcal{D}_m \times (0,T)$, $\Sigma_m = S_m \times [0,T]$, $m = 1,2$, $\overline{\mathcal{D}} = \mathcal{D} \cup S$, $\Sigma = S \times [0,T]$.

Введемо позначення для операторів диференціювання: D_t^r і D_x^p — символи частинної похідної по t з порядком r і будь-якої частинної похідної по x з порядком p відповідно, де r, p — цілі невід'ємні числа; $D_t \equiv \frac{\partial}{\partial t}$; $D_i \equiv \frac{\partial}{\partial x_i}$; $D_{ij} \equiv \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j}$, $i,j = 1, \dots, n$; $\nabla = (D_1, \dots, D_n)$, δ_i та $\delta_i^{(1)}$ $(i = 1, \dots, n)$ — тангенціальний диференціальний оператор на S та S_1 відповідно, тобто $\delta_i = \sum\limits_{k=1}^{n} \tau_{ik} D_k$, де $\tau_{ik} = \delta_i^k - \nu_i \nu_k$, $\delta_i^{(1)} = \sum\limits_{k=1}^{n} \tau_{ik}^{(1)} D_k$, де $\tau_{ik}^{(1)} = \delta_i^k - \nu_i^{(1)} \nu_k^{(1)}$, δ_i^k — символ Кронекера. Використовуватимемо визначені в [6] простори Гельдера $H^{l+\lambda,(l+\lambda)/2}(\overline{\mathbb{R}}^{n+1}_T)$, $H^{l+\lambda,(l+\lambda)/2}(\Sigma_m)$, $H^{l+\lambda}(\mathbb{R}^n)$ $(l = 0,1,2;\ m = 1,2;\ \lambda \in (0,1)$ – фіксоване) та клас поверхонь $H^{2+\lambda}$. Підмножину функцій з $H^{l+\lambda,(l+\lambda)/2}(\overline{B})$, які (у випадку $l = 2$ разом з похідною по t) перетворюються в нуль при $t = 0$ позначатимемо через $\overset{\circ}{H}{}^{l+\lambda,(l+\lambda)/2}(\overline{B})$, а через $||w||_{H^{l+\lambda}(\overline{B})}$ та $||w||_{H^{l+\lambda,(l+\lambda)/2}(\overline{B})}$ позначатимемо норму функції w в $H^{l+\lambda}(\overline{B})$ та $H^{l+\lambda,(l+\lambda)/2}(\overline{B})$, де $\overline{B}$ — одна з множин $\mathbb{R}^n$ та $\mathbb{R}^{n+1}_T$ або Σ_m, $m = 1,2$, відповідно. Всюди нижче C, та c — додатні сталі, які не залежать від (x,t), конкретні величини яких нас цікавити не будуть.

2 Параболічні потенціали

Розглянемо у шарі $\mathbb{R}^{n+1}_T$ два рівномірно параболічні оператори другого порядку з обмеженими коефіцієнтами вигляду

$$L_s u \equiv \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}^{(s)}(x,t) D_{ij} u + \sum_{i=1}^{n} a_i^{(s)}(x,t) D_i u + a_0^{(s)}(x,t) u - D_t u, \qquad s = 1,2. \tag{1}$$

Припускатимемо, що коефіцієнти операторів L_1 і L_2 визначені в $\mathbb{R}^{n+1}_T$ і виконані умови:

(A1) $\sum\limits_{i,j=1}^{n} a_{ij}^{(s)}(x,t)\xi_i\xi_j \ge \delta_{0s}|\xi|^2$, $a_{ij}^{(s)} = a_{ji}^{(s)}$, $\delta_{0s} > 0$, $s = 1,2$, $\forall (x,t) \in \overline{\mathbb{R}}^{n+1}_T$, $\forall \xi \in \mathbb{R}^n$;

(A2) $a_{ij}^{(s)}$, $a_i^{(s)}$, $a_0^{(s)} \in H^{\lambda,\lambda/2}(\overline{\mathbb{R}}^{n+1}_T)$, $s = 1,2$, $i,j = 1, \dots, n$.

Умови (A1), (A2) забезпечують існування звичайного фундаментального розв'язку (ф.р.) $G_s(x,t;\xi,\tau)$ $(0 \le \tau < t \le T,\ x, \xi \in \mathbb{R}^n)$ для оператора L_s, $s = 1,2$ [6]:

$$G_s(x,t;\xi,\tau) = G_{0s}^{(\xi,\tau)}(x,t;\xi,\tau) + G_{1s}(x,t;\xi,\tau), \qquad s = 1,2, \tag{2}$$

де

$$G_{0s}^{(\xi,\tau)}(x,t;\xi,\tau) = G_{0s}^{(\xi,\tau)}(x' - \xi', x_n - \xi_n, t - \tau) = (2\sqrt{\pi})^{-n} (\det A_s(\xi,\tau))^{-1/2} (t-\tau)^{-n/2} \times$$

$$\exp\left\{ -\frac{(A_s^{-1}(\xi,\tau)(x-\xi), x-\xi)}{4(t-\tau)} \right\}, \qquad s = 1,2, \qquad t > \tau, \tag{3}$$

$A_s(\xi,\tau) = \left(a_{ij}^{(s)}(\xi,\tau)\right)_{i,j=1}^{n}$, $A_s^{-1}(\xi,\tau) = \left(a_{(s)}^{ij}(\xi,\tau)\right)_{i,j=1}^{n}$ — матриця, обернена до матриці $A_s(\xi,\tau)$, G_{1s} — інтегральний член, який має більш "слабку" особливість, ніж $G_{0s}^{(\xi,\tau)}$ з (3) при $t \to \tau + 0$ і $G_s \equiv 0$, якщо $t \le \tau$. До того ж існують такі додатні сталі C і c, що для функцій G_s і G_{1s} при $0 \le \tau < t \le T$, $x, \xi \in \mathbb{R}^n$, $2r + p \le 2$, справедливі оцінки

$$|D_t^r D_x^p G_s(x,t;\xi,\tau)| \le C(t-\tau)^{-(n+2r+p)/2} \exp\left\{ -c\frac{|x-\xi|^2}{t-\tau} \right\}, \tag{4}$$

$$|D_t^r D_x^p G_{1s}(x,t;\xi,\tau)| \le C(t-\tau)^{-(n+2r+p-\lambda)/2} \exp\left\{ -c\frac{|x-\xi|^2}{t-\tau} \right\}. \tag{5}$$

Розглянемо параболічні потенціали простого шару:

$$u_s^{(1)}(x,t) = \int_0^t d\tau \int_{S_1} G_s(x,t;\xi,\tau) V_s(\xi,\tau) d\sigma_\xi, \qquad (x,t) \in \mathbb{R}^{n+1}_T, \qquad s = 1,2, \tag{6}$$

$$u_2^{(0)}(x,t) = \int_0^t d\tau \int_{S} G_2(x,t;\xi,\tau) V_0(\xi,\tau) d\sigma_\xi, \qquad (x,t) \in \mathbb{R}^{n+1}_T, \tag{7}$$

де V_s, $s = 1,2$, та V_0 — задані відповідно на Σ_1 та Σ обмежені вимірні функції. Як наслідок з оцінок (4), (5), функції $u_s^{(1)}$, $u_2^{(0)}$ неперервні в $\overline{\mathbb{R}}^{n+1}_T$, задовольняють рівняння $L_s u_s^{(1)} = 0$, $s = 1,2$, в $\mathbb{R}^{n+1}_T \setminus \Sigma_1$, $L_s u_2^{(0)} = 0$, в $\mathbb{R}^{n+1}_T \setminus \Sigma$ і початкову умову $u_s^{(1)}(x,0) = 0$, $u_2^{(0)}(x,0) = 0$.

Нехай для $(x,t) \in \Sigma_1$ та $(x,t) \in \Sigma$ визначені вектори конормалей $N^{(s)}(x,t) = (N_1^{(s)}(x,t), \dots, N_n^{(s)}(x,t))$, $N_i^{(s)}(x,t) = \sum\limits_{j=1}^{n} a_{ij}^{(s)}(x,t)\nu_j^{(1)}(x)$, $i = 1, \dots, n$, $s = 1,2$, та $N(x,t) = (N_1(x,t), \dots, N_n(x,t))$, $N_i(x,t) = \sum\limits_{j=1}^{n} a_{ij}^{(2)}(x,t)\nu_j(x)$, $i = 1, \dots, n$. Якщо $V_s \in \overset{\circ}{H}{}^{\lambda,\lambda/2}(\Sigma_1)$, $s = 1,2$, $V_0 \in \overset{\circ}{H}{}^{\lambda,\lambda/2}(\Sigma)$, то $u_s^{(1)} \in \overset{\circ}{H}{}^{1+\lambda,(1+\lambda)/2}(\overline{\Omega}_s)$, $s = 1,2$, $u_2^{(0)} \in \overset{\circ}{H}{}^{1+\lambda,(1+\lambda)/2}(\overline{\Omega}_2)$ (див. [2], [6], [14]) і для конормальної похідної функцій $u_s^{(1)}$, $s = 1,2$, та $u_2^{(0)}$ правильна формула стрибка ([6, с. 459])

$$\frac{\partial u_s^{(1)}(x,t)}{\partial N^{(s)}(x,t)} = \int_0^t d\tau \int_{S_1} \frac{\partial G_s(x,t;\xi,\tau)}{\partial N^{(s)}(x,t)} V_s(\xi,\tau) d\sigma_\xi + (-1)^{s-1}\frac{1}{2} V_s(x,t), \quad (x,t) \in \Sigma_1, \tag{8}$$

$$\frac{\partial u_2^{(0)}(x,t)}{\partial N(x,t)} = \int_0^t d\tau \int_{S} \frac{\partial G_2(x,t;\xi,\tau)}{\partial N(x,t)} V_0(\xi,\tau) d\sigma_\xi - \frac{1}{2} V_0(x,t), \quad (x,t) \in \Sigma. \tag{9}$$

Існування інтегралу у правій частині (8) випливає з нерівності ($0 \le \tau < t \le T$, $x, \xi \in S_1$)

$$\left|\frac{\partial G_s(x,t;\xi,\tau)}{\partial N^{(s)}(x,t)}\right| \le C(t-\tau)^{-(n+1-\lambda)/2}\exp\left\{-c\,\frac{|x-\xi|^2}{t-\tau}\right\}, \tag{10}$$

яка є вірною і для ядра $\frac{\partial G_2(x,t;\xi,\tau)}{\partial N(x,t)}$ у формулі (9) при $0 \le \tau < t \le T$, $x, \xi \in S$.

За допомогою ф.р. G_s, $s = 1,2$, з (2) визначають ще два параболічні потенціали, які застосовують при розв'язанні задачі Коші для загального параболічного рівняння другого порядку. Це – потенціал Пуассона

$$u_s^{(2)}(x,t) = \int\limits_{\mathbb{R}^n} G_s(x,t;\xi,0)\varphi_s(\xi)d\xi, \qquad (x,t) \in \mathbb{R}^{n+1}_T, \qquad s = 1,2, \tag{11}$$

і об'ємний потенціал

$$u_s^{(3)}(x,t) = \int\limits_0^t d\tau \int\limits_{\mathbb{R}^n} G_s(x,t;\xi,\tau)f_s(\xi,\tau)d\xi, \qquad (x,t) \in \mathbb{R}^{n+1}_T, \qquad s = 1,2, \tag{12}$$

де $\varphi_s(\xi)$ і $f_s(\xi,\tau)$, $s = 1,2$ — задані функції. Якщо припустити, що φ_s — обмежена і неперервна в $\mathbb{R}^n$, а $f_s \in H^{\lambda,\lambda/2}(\overline{\mathbb{R}}^{n+1}_T)$, то відомо (див. [6, гл. IV, § 14]), що функції $u_s^{(2)}$, $u_s^{(3)}$, $s = 1,2$, неперервні в $\overline{\mathbb{R}}^{n+1}_T$, та задовольняють рівняння $L_s u_s^{(2)} = 0$, $L_s u_s^{(3)} = -f_s$, $s = 1,2$, в $\mathbb{R}^{n+1}_T$ і початкові умови $u_s^{(2)}(x,0) = \varphi_s(x)$, $u_s^{(3)}(x,0) = 0$, $x \in \mathbb{R}^n$, $s = 1,2$. До того ж $u_s^{(2)} \in H^{2+\lambda,(2+\lambda)/2}(\overline{\mathbb{R}}^{n+1}_T)$, а у випадку, коли $\varphi_s \in H^{2+\lambda}(\mathbb{R}^n)$, і $u_s^{(3)} \in H^{2+\lambda,(2+\lambda)/2}(\overline{\mathbb{R}}^{n+1}_T)$.

3 Регуляризатор першої крайової задачі

Визначимо крайові оператори $\mathcal{E}_s$, $s = 0,1,2$, які потім використаємо в якості регуляризаторів системи інтегральних рівнянь Вольтерри, еквівалентної до сформульованої у п. 4 початково-крайової задачі. Зауважимо, що конструкція цих операторів повністю збігається з конструкцією інтегро-диференціального оператора $\mathcal{E}$, який вперше був введений у роботах [2, 14]. Опишемо структуру оператора $\mathcal{E}_0$, який пов'язаний з оператором L_2 та потенціалом $u_2^{(0)}$. Припустимо спочатку, що $S = \mathbb{R}^{n-1}$, а отже, $\Sigma = \mathbb{R}^n_T$. Розглянемо в $\mathbb{R}^n_T$ параболічний оператор наступного вигляду:

$$L_2' = \sum_{i,j=1}^{n-1} h_{ij}^{(2)}(x',t)D_{ij} - D_t, \tag{13}$$

де $h_{ij}^{(2)} = a_{ij}^{(2)} - a_{in}^{(2)}a_{nj}^{(2)}\left(a_{nn}^{(2)}\right)^{-1}$, $i,j = 1,\ldots,n-1$.

Нехай $\mathcal{H}_2(x',t;\xi',\tau)$ ($0 \le \tau < t \le T$, $x',\xi' \in \mathbb{R}^{n-1}$) — ф.р. для оператора L_2', і нехай функція ψ задана в $\mathbb{R}^n_T$. Позначимо ($(x',t) \in \mathbb{R}^n_T$)

$$\mathcal{E}_0(x',t)\psi = \frac{2}{\sqrt{\pi}}\left\{\frac{\partial}{\partial t}\int\limits_0^t (t-\tau)^{-1/2}d\tau \int\limits_{\mathbb{R}^{n-1}} \mathcal{H}_2(x',\hat{t};\xi',\tau)\psi(\xi',\tau)d\xi'\right\}\Bigg|_{\hat{t}=t}. \tag{14}$$

Лема 3.1. *([2], [14]). Оператор $\mathcal{E}_0$ є лінійним обмеженим оператором, що відображає простір $\overset{\circ}{H}{}^{1+\lambda,(1+\lambda)/2}(\overline{\mathbb{R}}^n_T)$ на простір $\overset{\circ}{H}{}^{\lambda,\lambda/2}(\overline{\mathbb{R}}^n_T)$. При цьому існує обернений оператор $\mathcal{E}_0^{-1} : \overset{\circ}{H}{}^{\lambda,\lambda/2}(\overline{\mathbb{R}}^n_T) \to \overset{\circ}{H}{}^{1+\lambda,(1+\lambda)/2}(\overline{\mathbb{R}}^n_T)$.*

Зауваження 3.1. *Використовуючи схему доведення леми 3.1, ми встановлюємо також, що оператор $\mathcal{E}_0$ відображає простір $\overset{\circ}{H}{}^{2+\lambda,(2+\lambda)/2}(\overline{\mathbb{R}}^n_T)$ на простір $\overset{\circ}{H}{}^{1+\lambda,(1+\lambda)/2}(\overline{\mathbb{R}}^n_T)$ і при цьому існує обернений оператор $\mathcal{E}_0^{-1} : \overset{\circ}{H}{}^{1+\lambda,(1+\lambda)/2}(\overline{\mathbb{R}}^n_T) \to \overset{\circ}{H}{}^{2+\lambda,(2+\lambda)/2}(\overline{\mathbb{R}}^n_T)$.*

Зауважимо, що $\mathcal{E}_0$ — регуляризатор у випадку першої крайової задачі (модельної) (див. [2, 10, 14]), а саме:

$$\mathcal{E}_0(x',t)u_2^{(0)} = (A_2(x',t)\nu(x'),\nu(x'))^{-1/2}V_0(x',t) +$$

$$\int\limits_0^t d\tau \int\limits_{\mathbb{R}^{n-1}} K_{20}(x',t;\xi',\tau)V_0(\xi',\tau)d\xi', \quad \forall V_0 \in \overset{\circ}{H}{}^{\lambda,\lambda/2}(\overline{\mathbb{R}}^n_T), \tag{15}$$

до того ж для ядра K_{20} справедлива оцінка (10), у правій частині якої вираз $|x-\xi|^2$ треба замінити на вираз $|x'-\xi'|^2$.

Розглянемо тепер випадок, коли межа S області $\mathcal{D}$ — елементарна поверхня, тобто $S = \{x \in \mathbb{R}^n | x_n = F(x')\}$, де функція F задовольняє умову

$$F \in H^{2+\lambda}(\mathbb{R}^{n-1}). \tag{16}$$

Надалі позначатимемо значення будь-якої функції $v(x,t)$ на $\Sigma = S \times [0,T]$ через $\overline{v}(x',t)$. Тоді регуляризатор $\mathcal{E}_0$ можна визначити рівністю (14), в якій ядро

$$\overline{\mathcal{H}}_2(x',t;\xi',\tau) = \mathcal{H}_2(x,t;\xi,\tau)|_{x_n=F(x'),\xi_n=F(\xi')}$$

є ф.р. оператора (13) з коефіцієнтами

$$\bar{\bar{h}}{}_{ij}^{(2)} = \bar{\tilde{a}}{}_{ij}^{(2)} - \bar{\tilde{a}}{}_{in}^{(2)}\bar{\tilde{a}}{}_{nj}^{(2)}\left(\bar{\tilde{a}}{}_{nn}^{(2)}\right)^{-1}, \tag{17}$$

де $\tilde{a}_{ij}^{(2)} = \tilde{a}_{ji}^{(2)} = a_{ij}^{(2)}$, $i,j = 1,\ldots,n-1$, $\tilde{a}_{in}^{(2)} = \tilde{a}_{ni}^{(2)} = a_{in}^{(2)} - \sum\limits_{k=1}^{n-1} a_{ik}^{(2)}F_k$, $i = 1,\ldots,n-1$, $\tilde{a}_{nn}^{(2)} = a_{nn}^{(2)} - 2\sum\limits_{k=1}^{n-1} a_{kn}^{(2)}F_k + \sum\limits_{k,l=1}^{n-1} a_{kl}^{(2)}F_kF_l$, $F_k = \frac{\partial F}{\partial x_k}$, $k = 1,\ldots,n-1$.

Що стосується дії оператора $\mathcal{E}_0$ на потенціал $u_2^{(0)}$, то її результат визначається рівністю (15).

Переходимо до загального випадку. Припустимо, що межа S області $\mathcal{D}$ — будь-яка обмежена гіперповерхня загального вигляду з класу $H^{2+\lambda}$. Нагадаємо, (див. [2, 6]), що S називають поверхнею класу $H^{2+\lambda}$, якщо кожна її точка x^0 має окіл O_{x^0} такий, що множина $S \cap O_{x^0}$ описується в локальній (місцевій) системі координат $\{y\} = \{y_1,\ldots,y_n\}$, зв'язаній з точкою x^0, рівнянням

$$y_n = F_{x^0}(y'), \quad y' \in \overline{B}_{x^0}, \quad F_{x^0} \in H^{2+\lambda}(\overline{B}_{x^0}),$$

де $B_{x^0} = \{y' \in \mathbb{R}^{n-1} \,|\, |y'| < d\}$, до того ж стала $d > 0$ не залежить від точки x^0, і скінченною буде величина $\sup\limits_{x \in S} ||F_x(y)||_{H^{2+\lambda}(\overline{B}_x)}$.

Покладемо $\mathcal{D}_\varepsilon = \left\{ x \in \mathcal{D} \,|\, \inf\limits_{x_0 \in S} |x - x_0| < \varepsilon \right\}$, $(\varepsilon > 0)$, і нехай μ — будь-яке мале додатне число $(0 < \mu < d/2)$. Тоді (див. [9]) існує така скінченна множина фіксованих точок $\{x^{(m)} \in S\}$, $m = 1, \ldots, N$, що області $\mathcal{D}_j^{(m)}$, $j = 1, 2$, в локальній системі координат $\{y\}$, зв'язаній з точкою $x^{(m)}$, записують у вигляді

$$\mathcal{D}_j^{(m)} = \{y \in \mathbb{R}^n \,|\, |y'| < j\mu, \; |y_n - F_{x^{(m)}}(y')| < j\mu\}, \qquad j = 1, 2,$$

і вони володіють властивостями:

1) існує таке число $\varepsilon = \varepsilon(\mu)$, що $\mathcal{D}_\varepsilon \subset \bigcup\limits_m \mathcal{D}_1^{(m)}$;

2) існує таке ціле число N_0 (яке не залежить від μ), що перетин будь-яких $N_0 + 1$ областей $\mathcal{D}_2^{(m)}$ порожній.

Введемо "розбиття одиниці", що підпорядковане покриттю $\bigcup\limits_m \mathcal{D}_2^{(m)}$ "межевої смуги" $\mathcal{D}_\varepsilon$, а саме систему функцій $\{\omega^{(m)} \in C^\infty(\mathbb{R}^n)\}$ з наступними властивостями:

$$0 \le \omega^{(m)} \le 1, \qquad \omega^{(m)} = 1 \text{ при } x \in \mathcal{D}_1^{(m)}, 0 \text{ при } x \in \mathbb{R}^n \backslash \mathcal{D}_2^{(m)},$$

$$\operatorname{supp}(\omega^{(m)}) \subset \mathcal{D}_2^{(m)}, \qquad \sum_{m=1}^{N} \omega^{(m)}(x) = 1, \quad \text{якщо } x \in \mathcal{D}_\varepsilon, \tag{18}$$

і нехай

$$\alpha^{(m)} = \omega^{(m)} \left[\sum_{m=1}^{N} \left(\omega^{(m)}\right)^2 \right]^{-1}, \qquad S_j^{(m)} = \mathcal{D}_j^{(m)} \cap S, \quad j = 1, 2. \tag{19}$$

Нехай $\{y, t\}$ — місцева система координат в точці $x^{(m)}$. Координати $\{x\}$ і $\{y\}$ зв'язані співвідношенням

$$Y = C^{(m)}(X - X^{(m)}),$$

де $C^{(m)}$ — ортогональна матриця, X і Y — стовпці з координат $x_1, \ldots, x_n$ і $y_1, \ldots, y_n$ відповідно. Позначимо через $\overline{S}_{2,0}^{(m)}$ проекцію $\overline{S}_2^{(m)}$ на площину $y_n = 0$. Між точками $y \in \overline{S}_2^{(m)}$ і $y' \in \overline{S}_{2,0}^{(m)}$ існує взаємнооднозначна відповідність. Припускаємо, що $\overline{S}_2^{(m)}$ в локальній системі координат $\{y\}$ з початком в точці $x^{(m)}$ задається рівнянням

$$y_n = F_{x^{(m)}}(y') = F^{(m)}(y'), \quad y' \in \overline{S}_{2,0}^{(m)}, \tag{20}$$

де $F^{(m)}$ — функція з класу $H^{2+\lambda}(\overline{S}_{2,0}^{(m)})$.

Визначимо тепер за допомогою формули (17) функції $\bar{h}_{ij}^{(2,m)}(y', t)$, $(y', t) \in \overline{S}_{2,0}^{(m)} \times [0, T]$, $i, j = 1, \ldots, n-1$, $m = 1, \ldots, N$, у правій частині якої замість $\bar{\bar{a}}_{ij}^{(2)}$, $i, j = 1, \ldots, n$, треба покласти $\bar{\bar{\hat{a}}}_{ij}^{(2,m)}$, де $\hat{a}_{ij}^{(2,m)}$ — елементи матриці $\hat{A}_2^{(m)}(y', t) = C^{(m)} A_2^{(m)}(y', t)(C^{(m)})^T$, $A_2^{(m)}(y', t) = A_2(x(y), t)$. У свою чергу, використовуючи функції $\bar{h}_{ij}^{(2,m)}(y', t)$ та формулу (13), визначимо в області $S_{2,0}^{(m)} \times (0, T]$ рівномірно параболічний оператор $L_2^{'(m)}$. Продовжимо коефіцієнти цього оператора на $\overline{\mathbb{R}}_T^{n,(m)} = \mathbb{R}^{n-1,(m)} \times [0, T]$ зі збереженням властивостей (A1), (A2) і позначимо через $\overline{\mathcal{H}}_2^{(m)}(y', t; \eta', \tau)$ $(0 \le \tau < t \le T, \; y', \eta' \in \mathbb{R}^{n-1,(m)})$ ф.р. для $L_2^{'(m)}$.

Нарешті визначимо функції

$$\mathcal{H}_2^{(m)}(x, t; \xi, \tau) \equiv \overline{\mathcal{H}}_2^{(m)}(y'(x), t; \eta'(\xi), \tau), \quad 0 \le \tau < t \le T, \quad x, \xi \in \overline{S}_2^{(m)},$$

$$\mathcal{H}_2(x, t; \xi, \tau) = \sum_{m=1}^{N} \omega^{(m)}(x) \alpha^{(m)}(\xi) \mathcal{H}_2^{(m)}(x, t; \xi, \tau) \bar{\hat{\nu}}_n^{(m)}(\eta'(\xi)), \quad 0 \le \tau < t \le T, \quad x, \xi \in S,$$

де $\hat{\nu}^{(m)}(y) = C^{(m)} \nu^{(m)}(y)$, $\nu^{(m)}(y) = \nu(x(y))$ і, припускаючи, що $\psi \in \overset{\circ}{H}{}^{l+\lambda,(l+\lambda)/2}(\Sigma)$, $l = 1, 2$, покладемо при $(x, t) \in \Sigma$

$$\mathcal{E}_0^{(m)} \psi = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \times$$
$$\left. \left\{ \frac{\partial}{\partial t} \int_0^t (t - \tau)^{-\frac{1}{2}} d\tau \int_S \omega^{(m)}(x) \alpha^{(m)}(\xi) \mathcal{H}_2^{(m)}(x, \hat{t}; \xi, \tau) \bar{\hat{\nu}}_n^{(m)}(\eta'(\xi)) \psi(\xi, \tau) d\sigma_\xi \right\} \right|_{\hat{t}=t},$$

$$\mathcal{E}_0(x, t)\psi = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \left. \left\{ \frac{\partial}{\partial t} \int_0^t (t - \tau)^{-\frac{1}{2}} d\tau \int_S \mathcal{H}_2(x, \hat{t}; \xi, \tau) \psi(\xi, \tau) d\sigma_\xi \right\} \right|_{\hat{t}=t} =$$
$$\sum_{m=1}^{N} \mathcal{E}_0^{(m)}(x, t)\psi. \tag{21}$$

Побудову оператора $\mathcal{E}_0$ завершено. У формулі (21) інтегро-диференціальні оператори $\mathcal{E}_0^{(m)}$, $m = 1, \ldots, N$, називатимемо локальними регуляризаторами. Їх властивості можна описати за допомогою тверджень, що належать до леми 3.1 та зауваження 3.1. З цих властивостей безпосередньо випливає наступне твердження.

Лема 3.2. *Оператор $\mathcal{E}_0$, визначений за формулою (21), є лінійним обмеженим оператором, що відображає простір $\overset{\circ}{H}{}^{l+\lambda,(l+\lambda)/2}(\Sigma)$ на простір $\overset{\circ}{H}{}^{l-1+\lambda,(l-1+\lambda)/2}(\Sigma)$, $l = 1, 2$. При цьому рівняння $\mathcal{E}_0\psi = 0$ має в просторі $\overset{\circ}{H}{}^{l+\lambda,(l+\lambda)/2}(\Sigma)$ лише тривіальний розв'язок $\psi = 0$.*

Подіємо оператором $\mathcal{E}_0$ на потенціал $u_2^{(0)}$ з (7). Враховуючи при цьому співвідношення (15), $\forall V_0 \in \overset{\circ}{H}{}^{\lambda,\lambda/2}(\Sigma)$ одержимо

$$\mathcal{E}_0(x, t) u_2^{(0)} = (A_2(x, t)\nu(x), \nu(x))^{-1/2} V_0(x, t) + \int_0^t d\tau \int_S K_{20}(x, t; \xi, \tau) V_0(\xi, \tau) d\sigma_\xi, \tag{22}$$

до того ж, для ядра $K_{20}(x, t; \xi, \tau)$ в кожній області вигляду $0 \le \tau < t \le T$, $x, \xi \in S$, справедлива оцінка (10).

Крім регуляризатора $\mathcal{E}_0$, ми будемо використовувати також побудовані за аналогічною схемою граничні оператори $\mathcal{E}_s$, $s = 1, 2$, які пов'язані з поверхнею S_1, операторами L_s, $s = 1, 2$, та потенціалами $u_s^{(1)}$, $s = 1, 2$, з (6).

4 Постановка параболічної початково-крайової задачі з умовою спряження типу Вентцеля та її розв'язання

Розглянемо задачу спряження

$$L_s u_s(x,t) = -f_s(x,t), \qquad (x,t)\in\Omega_s, \qquad s=1,2, \tag{23}$$

$$u_s(x,0) = \varphi_s(x), \qquad x\in\mathcal{D}_s, \qquad s=1,2, \tag{24}$$

$$L_3 u(x,t) \equiv u_1(x,t) - u_2(x,t) = z(x,t), \qquad (x,t)\in\Sigma_1\backslash S_1, \tag{25}$$

$$L_4 u(x,t) \equiv \sum_{i,j=1}^{n} \beta_{ij}^{(1)}(x,t)\delta_i^{(1)}\delta_j^{(1)}u_2 + (\beta^{(1)}(x,t),\nabla u_2) + \beta_0^{(1)}(x,t)u_2 - D_t u_2 -$$
$$(\alpha(x,t),\nabla u_1) + \alpha_0(x,t)u_1 = \theta(x,t), \qquad (x,t)\in\Sigma_1\backslash S_1, \tag{26}$$

$$L_5 u(x,t) \equiv \sum_{i,j=1}^{n} \beta_{ij}(x,t)\delta_i\delta_j u_2 + (\beta(x,t),\nabla u_2) + \beta_0(x,t)u_2 - D_t u_2 = \psi(x,t),$$
$$(x,t)\in\Sigma\backslash S, \tag{27}$$

де $u(x,t)=(u_1,u_2)$, $\alpha(x,t)=(\alpha_1(x,t),\ldots,\alpha_n(x,t))$, $\beta^{(1)}(x,t)=(\beta_1^{(1)}(x,t),\ldots,\beta_n^{(1)}(x,t))$, $\beta(x,t)=(\beta_1(x,t),\ldots,\beta_n(x,t))$.

Припускаємо, що коефіцієнти операторів L_1 і L_2 задовольняють умови (A1), (A2) з п.2, а коефіцієнти операторів типу Вентцеля L_4 і L_5 задовольняють наступні умови:

(B1) $\sum\limits_{i,j=1}^{n} \beta_{ij}^{(1)}(x,t)\xi_i\xi_j \ge \mu_{01}|\xi|^2$, $\beta_{ij}^{(1)}=\beta_{ji}^{(1)}$, $\mu_{01}>0$, $\forall (x,t)\in\Sigma_1$, $\forall\xi\in\mathbb{R}^n$, $\xi\perp\nu^{(1)}(x)$;
$\sum\limits_{i,j=1}^{n} \beta_{ij}(x,t)\xi_i\xi_j \ge \mu_0|\xi|^2$, $\beta_{ij}=\beta_{ji}$, $\mu_0>0$, $\forall (x,t)\in\Sigma$, $\forall\xi\in\mathbb{R}^n$, $\xi\perp\nu(x)$;

(B2) $\beta_{ij}^{(1)}$, $\beta_i^{(1)}$, α_i, $\beta_0^{(1)}$, $\alpha_0 \in H^{\lambda,\lambda/2}(\Sigma_1)$, β_{ij}, β_i, $\beta_0 \in H^{\lambda,\lambda/2}(\Sigma)$, $i,j=1,\ldots,n$, $(\beta^{(1)},\nu^{(1)})\ge 0$, $(\alpha,\nu^{(1)})\ge 0$, $(\beta,\nu)\ge 0$.

Що стосується поверхонь S і S_1 та правих частин рівностей (23)–(27), то будемо вважати, що

$$S,\ S_1\in H^{2+\lambda}, \qquad \rho(S,S_1)\ge d_0>0, \tag{28}$$

$$f_s\in H^{\lambda,\lambda/2}(\overline{\mathbb{R}}_T^{n+1}), \qquad \varphi_s\in H^{2+\lambda}(\mathbb{R}^n), \qquad s=1,2,$$
$$z\in H^{2+\lambda,(2+\lambda)/2}(\Sigma_1), \qquad \theta\in H^{\lambda,\lambda/2}(\Sigma_1), \qquad \psi\in H^{2+\lambda,(2+\lambda)/2}(\Sigma), \tag{29}$$

і виконані умови узгодження

$$\varphi_1(x)-\varphi_2(x)=z(x,0),\ x\in S_1,$$

$$\sum_{i,j=1}^{n} \beta_{ij}^{(1)}(x,0)\delta_i^{(1)}\delta_j^{(1)}\varphi_2 + (\beta^{(1)}(x,0),\nabla\varphi_2) - (\alpha(x,0),\nabla\varphi_1) + \beta_0^{(1)}(x,0)\varphi_2 +$$
$$\alpha_0(x,0)\varphi_1 - \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}^{(s)}(x,0)D_{ij}\varphi_s - \sum_{i=1}^{n} a_i^{(s)}(x,0)D_i\varphi_s - a_0^{(s)}(x,0)\varphi_s - f_s =$$
$$\theta(x,0) + (s-1)D_t z(x,t)|_{t=0}, \qquad x\in S_1, \quad s=1,2,$$
$$\sum_{i,j=1}^{n} \beta_{ij}(x,0)\delta_i\delta_j\varphi_2 + (\beta(x,0),\nabla\varphi_2) + \beta_0(x,0)\varphi_2 - \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}^{(2)}(x,0)D_{ij}\varphi_2 -$$
$$\sum_{i=1}^{n} a_i^{(2)}(x,0)D_i\varphi_2 - a_0^{(2)}(x,0)\varphi_2 - f_2 = \psi(x,0), \qquad x\in S. \tag{30}$$

Основним результатом статті є наступне твердження.

Теорема. *Нехай коефіцієнти операторів* L_s, $s=1,2$, *і* L_4, L_5 *задовольняють умови (A1), (A2) і (B1), (B2) відповідно, а для поверхонь* S *і* S_1 *та функцій* f_s, φ_s, $s=1,2$, z, θ, ψ *з (23)–(27) виконані умови (28), (29). Тоді при виконанні умов узгодження (30) задача (23)–(27) має єдиний розв'язок*

$$u_s\in H^{2+\lambda,(2+\lambda)/2}(\overline{\Omega}_s), \qquad s=1,2, \tag{31}$$

для якого справедлива оцінка

$$\sum_{s=1}^{2}\|u_s\|_{H^{2+\lambda,(2+\lambda)/2}(\overline{\Omega}_s)} \le C\Bigg[\sum_{s=1}^{2}\|f_s\|_{H^{\lambda,\lambda/2}(\overline{\mathbb{R}}_T^{n+1})} +$$
$$\sum_{s=1}^{2}\|\varphi_s\|_{H^{2+\lambda}(\mathbb{R}^n)} + \|z\|_{H^{2+\lambda,(2+\lambda)/2}(\Sigma_1)} + \|\theta\|_{H^{\lambda,\lambda/2}(\Sigma_1)} + \|\psi\|_{H^{2+\lambda,(2+\lambda)/2}(\Sigma)}\Bigg]. \tag{32}$$

Доведення. Будемо шукати розв'язок задачі (23)–(27) у вигляді

$$u_s(x,t) = \sum_{m=0}^{3} u_s^{(m)}(x,t), \qquad (x,t)\in\Omega_s, \qquad s=1,2, \tag{33}$$

де $u_1^{(0)}\equiv 0$, а функції $u_2^{(0)}$, $u_s^{(1)}$, $u_s^{(2)}$, $u_s^{(3)}$, $s=1,2$, визначені за формулами (6), (7), (11), (12). У зображенні (33) невідомими є функції V_m, $m=0,1,2$, що входять до потенціалів простого шару $u_2^{(0)}$, $u_s^{(1)}$, $s=1,2$. З властивостей потенціалів, описаних в п. 2, випливає, що для розв'язання задачі нам треба підібрати V_m, $m=0,1,2$, у такий спосіб, щоб для $u(x,t)$ виконувалися умови спряження (25), (26), крайова умова (27), а при виконанні умов узгодження (30), були правильними умова (31) та нерівність (32).

Припустимо a priori, що V_m, $m=0,1,2$, задовольняють умови

$$V_0\in \overset{\circ}{H}{}^{\lambda,\lambda/2}(\Sigma), \quad V_s\in \overset{\circ}{H}{}^{\lambda,\lambda/2}(\Sigma_1), \quad s=1,2, \tag{34}$$

і займемося спочатку вивченням крайової умови (27). З цією метою перетворимо рівність (27), виділивши в ній у виразах, що містять похідні першого порядку за просторовими змінними, окремо тангенціальну і конормальну складові. Таке перетворення легко здійснити, якщо скористатися співвідношенням

$$(\beta(x,t), \nabla u_2) = \sum_{i=1}^{n} \beta_i(x,t)\tilde{\delta}_i u_1 + \gamma(x,t)\frac{\partial u_2(x,t)}{\partial N(x,t)},$$

де $\tilde{\delta}_i = D_i - \frac{\nu_i}{(N,\nu)} \sum\limits_{k=1}^{n} N_k D_k$, $i = 1, \ldots, n$, — дотичний диференціальний оператор на S,

$$\gamma(x,t) = \frac{(\beta(x,t), \nu(x))}{(N(x,t), \nu(x))}.$$

Тоді умову (27) можна записати у вигляді ($(x,t) \in \Sigma \backslash S$):

$$\tilde{L}_5 u(x,t) \equiv \sum_{i,j=1}^{n} \beta_{ij}(x,t)\delta_i\delta_j u_2 + \sum_{i=1}^{n} \beta_i(x,t)\tilde{\delta}_i u_2 + \beta_0(x,t)u_2 - D_t u_2 = \psi_0(x,t) \tag{35}$$

або

$$\tilde{L}_5 u(x,t) \equiv \sum_{k,l=1}^{n} \tilde{\beta}_{kl}(x,t)D_{kl}u_2 + \sum_{k=1}^{n} \tilde{\beta}_k(x,t)D_k u_2 + \beta_0(x,t)u_2 - D_t u_2 = \psi_0(x,t), \tag{36}$$

де

$$\tilde{\beta}_{kl}(x,t) = \sum_{i,j=1}^{n} \beta_{ij}(x,t)\tau_{ik}(x)\tau_{jl}(x), \qquad k,l = 1,\ldots,n,$$

$$\tilde{\beta}_k(x,t) = \beta_k(x,t) - \gamma(x,t)N_k(x,t) - \sum_{i,j=1}^{n} \beta_{ij}(x,t)\delta_i(\nu_j(x)\nu_k(x)),$$

$$\psi_0(x,t) = \psi(x,t) - \gamma(x,t)\frac{\partial u_2(x,t)}{\partial N(x,t)}. \tag{37}$$

Як бачимо, до правої частини рівнянь (35), (36), тобто до функції ψ_0, входить похідна вздовж конормалі від шуканої функцій u_2, яку можна розкрити, використовуючи зображення (33). При цьому похідна $\frac{\partial u_2^{(0)}(x,t)}{\partial N(x,t)}$ визначається за допомогою формули (9), а для $\frac{\partial u_2^{(1)}(x,t)}{\partial N(x,t)}$ має місце співвідношення

$$\frac{\partial u_2^{(1)}(x,t)}{\partial N(x,t)} = \int_0^t d\tau \int_{S_1} \frac{\partial G_2(x,t;\xi,\tau)}{\partial N(x,t)} V_2(\xi,\tau) d\sigma_\xi, \quad (x,t) \in \Sigma, \tag{38}$$

причому для ядра $\frac{\partial G_2(x,t;\xi,\tau)}{\partial N(x,t)}$, враховуючи (28), легко отримати оцінку ($0 \le \tau < t \le T$, $(x,t) \in \Sigma$, $(\xi,\tau) \in \Sigma_1$)

$$\left|\frac{\partial G_2(x,t;\xi,\tau)}{\partial N(x,t)}\right| \le C \exp\left\{-\frac{|x-\xi|^2}{t-\tau}\right\} \tag{39}$$

з деякою сталою C, яка залежить від d_0. Оцінка (39) гарантує нам існування інтеграла в правій частині (38).

Розглянемо (36) як автономне параболічне рівняння на $\Sigma \backslash S$. У цьому рівнянні, як випливає з умов теореми, умови (34), формул (37) та властивостей потенціалів (див. п. 2), його коефіцієнти $\tilde{\beta}_{kl}$, $\tilde{\beta}_k$, $k,l = 1,2,\ldots,n$, β_0 та права частина ψ_0 належать до класу $H^{\lambda,\lambda/2}(\Sigma)$. Відомо (див. [1, 2, 9, 14]), що для розв'язку u_2 цього рівняння, який задовольняє початкову умову

$$u_2(x,0) = \varphi_2(x), \qquad x \in S, \tag{40}$$

справедлива нерівність

$$\|u_2\|_{H^{2+\lambda,(2+\lambda)/2}(\Sigma)} \le C\left[\|\psi_0\|_{H^{\lambda,\lambda/2}(\Sigma)} + \|\varphi_2\|_{H^{2+\lambda}(S)}\right]. \tag{41}$$

Знайдемо тепер інтегральне зображення розв'язку задачі Коші для рівняння (36). З цією метою для оператора $\tilde{L}_5$ побудуємо ф.р., який надалі позначатимемо через $\Gamma(x,t;\xi,\tau)$ ($0 \le \tau < t \le T$, $x,\xi \in S$). Насамперед відзначимо, що ідея, на якій базується побудова ф.р. Γ є подібною до ідеї, за допомогою якої було здійснено конструкцію регуляризатора $\mathcal{E}_0$ (див. п. 2). Відзначимо також, що функцію Γ та її похідні за змінними x і t можна оцінювати за допомогою нерівностей (4) та (5), замінюючи в їх правих частинах розмірність простору n на $n-1$.

Отже, спочатку розглядається випадок, коли $S = \mathbb{R}^{n-1}$. У цьому випадку $\delta_i = D_i$, $\tilde{\delta}_i = D_i$, $i = 1,\ldots,n-1$, $\tilde{\delta}_n = 0$, а тому рівняння (36) перетворюється в лінійне параболічне рівняння другого порядку з гельдеровими коефіцієнтами, що розглядаються на $\Sigma = \mathbb{R}^n_T$, вигляду:

$$\tilde{L}_5 \bar{u} \equiv \sum_{k,l=1}^{n-1} \bar{\beta}_{kl}(x',t)D_{kl}\bar{u}_2 + \sum_{k=1}^{n-1} \bar{\bar{\beta}}_k(x',t)D_k\bar{u}_2 + \bar{\beta}_0(x',t)\bar{u}_2 - D_t\bar{u}_2 = \bar{\psi}_0(x',t), \tag{42}$$

де

$$\bar{\bar{\beta}}_k(x',t) = \bar{\beta}_k(x',t) - \bar{\beta}_n(x',t)\frac{\bar{a}_{in}^{(2)}(x',t)}{\bar{a}_{nn}^{(2)}(x',t)}, \qquad \bar{\psi}_0(x',t) = \bar{\psi}(x',t) - \frac{\bar{\beta}_n(x',t)}{\bar{a}_{nn}^{(2)}(x',t)} \cdot \frac{\partial \bar{u}_2(x',t)}{\partial \bar{N}(x',t)}.$$

Існування ф.р. Γ для оператора $\tilde{L}_5$ забезпечують умови (B1), (B2).

Наступний крок — це припущення про те, що S — елементарна поверхня з класу $H^{2+\lambda}$, тобто $S = \{x \in \mathbb{R}^n | x_n = F(x')\}$, де функція $F(x')$ задовольняє умову (16). Даний випадок, який детально вивчений в роботі [10], можна звести до попереднього, якщо використати так зване розпрямлююче перетворення координат [9]:

$$(x,t) \to (z,t), \qquad z_i = x_i, \qquad i = 1,\ldots,n-1, \qquad z_n = x_n - F(x'),$$

яке межу S переводить у гіперплощину $\bar{S} = \{z \in \mathbb{R}^n | z_n = 0\}$. Тут ми зауважимо лише, що в розглядуваному випадку параболічне рівняння відносно функції

$$\bar{u}_2(x',t) = u_2(x',F(x'),t),$$

якому відповідає шуканий ф.р. $\bar{\Gamma}(x',t;\xi',\tau)$ $(0\le\tau<t\le T,\ x',\xi'\in\mathbb{R}^{n-1})$, безпосередньо можна отримати з рівняння (36), підставляючи там $D_n\bar{u}_2=0$, $D_{kn}\bar{u}_2=0$, $k=1,\dots,n$, $\bar{\tilde{\beta}}_{kl}(x',t)=\tilde{\beta}_{kl}(x',F(x'),t)$, $k=1,\dots,n-1$, $\bar{\tilde{\beta}}_k(x',t)=\tilde{\beta}_k(x',F(x'),t)$, $k=1,\dots,n$, $\bar{\beta}_0(x',t)=\beta_0(x',F(x'),t)$, $\bar{\psi}_0(x',t)=\psi_0(x',F(x'),t)$:

$$\tilde{L}_5\bar{u}\equiv\sum_{k,l=1}^{n-1}\bar{\tilde{\beta}}_{kl}(x',t)D_{kl}\bar{u}_2+\sum_{k=1}^{n-1}\bar{\tilde{\beta}}_k(x',t)D_k\bar{u}_2+\bar{\beta}_0(x',t)\bar{u}_2-D_t\bar{u}_2=\bar{\psi}_0(x',t),\tag{43}$$

де коефіцієнти $\bar{\tilde{\beta}}_{kl}(x',t)$, $\bar{\tilde{\beta}}_k(x',t)$ та $\bar{\beta}_0(x',t)$ визначені формулами (37), і матриця

$$\bar{\tilde{B}}_{n-1}(x',t))=\left(\bar{\tilde{\beta}}_{kl}(x',t)\right)_{k,l=1}^{n-1}$$

— невід'ємно визначена, симетрична та рівномірно невироджена, тобто для її коефіцієнтів виконана умова (B1).

Використаємо рівняння (43) для побудови ф.р. рівняння

$$\tilde{L}_5u=0,\qquad (x,t)\in S\times(0,T),\tag{44}$$

де $\tilde{L}_5u$ визначається лівою частиною рівняння (35) або (36).

З цією метою введемо до розгляду функції

$$\bar{P}_0(x',t;\xi',\tau)=\bar{P}_0^{(\xi',\tau)}(x'-\xi',t-\tau)=(2\sqrt{\pi})^{-(n-1)}(\det\bar{\tilde{B}}_{n-1}(\xi',\tau))^{-1/2}(t-\tau)^{-(n-1)/2}\times$$
$$\exp\left\{-\frac{\left(\left(\bar{\tilde{B}}_{n-1}(\xi',\tau)\right)^{-1}(x'-\xi'),x'-\xi'\right)}{4(t-\tau)}\right\},\qquad 0\le\tau<t\le T,\quad x',\xi'\in\mathbb{R}^{n-1},$$

$$\bar{\Gamma}_0(x',t;\xi',\tau)=\bar{\Gamma}_0^{(\xi',\tau)}(x'-\xi',t-\tau)=\bar{P}_0(x',t;\xi',\tau)\bar{\nu}_n(\xi'),\qquad 0\le\tau<t\le T,\quad x',\xi'\in\mathbb{R}^{n-1}.$$

Тоді

$$P_0(x,t;\xi,\tau)=P_0^{(\xi,\tau)}(x'-\xi',t-\tau)=(2\sqrt{\pi})^{-(n-1)}(\det\bar{\tilde{B}}_{n-1}(\xi,\tau))^{-1/2}(t-\tau)^{-(n-1)/2}\times$$
$$\exp\left\{-\frac{\left(\left(\bar{\tilde{B}}_{n-1}(\xi,\tau)\right)^{-1}(x'-\xi'),x'-\xi'\right)}{4(t-\tau)}\right\},\qquad 0\le\tau<t\le T,\quad x,\xi\in S,$$

$$\Gamma_0(x,t;\xi,\tau)=\Gamma_0^{(\xi,\tau)}(x'-\xi',t-\tau)=P_0(x,t;\xi,\tau)\nu_n(\xi),\qquad 0\le\tau<t\le T,\quad x,\xi\in S.$$

Відзначимо, що функція $\bar{P}_0(x',t;\xi',\tau)$ — ф.р. рівняння

$$\sum_{k,l=1}^{n-1}\bar{\tilde{\beta}}_{kl}(\xi',\tau)D_{kl}\bar{u}_2(x',t)-D_t\bar{u}_2(x',t)=0,\qquad (x',t)\in\mathbb{R}^n_T,$$

із замороженими у точці $(\xi',\tau)\in\overline{\mathbb{R}}^n_T$ коефіцієнтами. Функцію Γ_0 приймаємо за головну частину ф.р. рівняння (44), а ф.р. Γ цього рівняння будуємо з використанням методу Леві [6, гл. IV, § 11].

Нарешті, розглядаючи загальний випадок гіперповерхні $S\in H^{2+\lambda}$, зауважимо, що при побудові ф.р. Γ треба використати атлас многовиду S, що побудований за допомогою розбиття одиниці (18). У цьому випадку рівняння (36) у місцевій системі кооринат $\{y,t\}$ в точці $x^{(m)}$ запишемо у вигляді:

$$\tilde{L}_{5,(m)}u^{(m)}\equiv\sum_{k,l=1}^{n}\tilde{\hat{\beta}}_{kl}^{(m)}(y,t)D_{kl}u_2^{(m)}+\sum_{k=1}^{n}\tilde{\hat{\beta}}_k^{(m)}(y,t)D_ku_2^{(m)}+\beta_0^{(m)}(y,t)u_2^{(m)}-$$
$$D_tu_2^{(m)}=\psi_0^{(m)}(y,t),\qquad (y,t)\in S\times(0,T],\tag{45}$$

де $u_2^{(m)}(y,t)=u_2(x(y),t)$, $\hat{\beta}_{kl}^{(m)}(y,t)$, $k,l=1,\dots,n$, — елементи матриці

$$\hat{B}^{(m)}(y,t)=C^{(m)}B^{(m)}(y,t)(C^{(m)})^T,\quad B^{(m)}(y,t)=B(x(y),t)=(\beta_{ij}(x(y),t))_{i,j=1}^n,$$

$\hat{\beta}_k^{(m)}(y,t)$, $k=1,\dots,n$, — координати вектора

$$\hat{\beta}^{(m)}(y,t)=C^{(m)}\beta^{(m)}(y,t),\quad \beta^{(m)}(y,t)=\beta(x(y),t),$$

$\beta_0^{(m)}(y,t)=\beta_0(x(y),t)$, $\psi_0^{(m)}(y,t)=\psi_0(x(y),t)=\psi^{(m)}(y,t)-\gamma^{(m)}(y,t)\frac{\partial u_2^{(m)}(y,t)}{\partial\hat{N}^{(m)}(y,t)}$, $\psi^{(m)}(y,t)=\psi(x(y),t)$, $\gamma^{(m)}(y,t)=\gamma(x(y),t)=\frac{(\hat{\beta}^{(m)}(y,t),\hat{\nu}^{(m)}(y))}{(\hat{N}^{(m)}(y,t),\hat{\nu}^{(m)}(y))}$, $\hat{N}^{(m)}(y,t)=C^{(m)}N^{(m)}(y,t)$, $N^{(m)}(y,t)=N(x(y),t)$ — вектор конормалі, віднесений до матриці $\hat{A}_2^{(m)}(y,t)$.

Далі переконуємося у тому, що за умови, коли $(y,t)\in\bar{S}_2^{(m)}\times[0,T]$, рівняння (45) відносно функції

$$u_2^{(m)}(y,t)\Big|_{y\in\bar{S}_2^{(m)}}=u_2^{(m)}(y',F^{(m)}(y'),t)=\bar{u}_2^{(m)}(y',t),$$

де $F^{(m)}(y')$ визначена формулою (20), приймає вигляд

$$\tilde{L}_{5,(m)}\bar{u}^{(m)}\equiv\sum_{k,l=1}^{n-1}\bar{\tilde{\hat{\beta}}}_{kl}^{(m)}(y',t)D_{kl}\bar{u}_2^{(m)}+\sum_{k=1}^{n-1}\bar{\tilde{\hat{\beta}}}_k^{(m)}(y',t)D_k\bar{u}_2^{(m)}+\bar{\beta}_0^{(m)}(y',t)\bar{u}_2^{(m)}-$$
$$D_t\bar{u}_2^{(m)}=\bar{\psi}_0^{(m)}(y',t),\qquad (y',t)\in S_{2,0}^{(m)}\times(0,T].\tag{46}$$

У рівнянні (46) $\bar{\beta}_0^{(m)}(y',t)=\beta_0^{(m)}(y',F^{(m)}(y'),t)$, а $\bar{\tilde{\hat{\beta}}}_{kl}^{(m)}(y',t)=\tilde{\hat{\beta}}_{kl}^{(m)}(y',F^{(m)}(y'),t)$, $\bar{\tilde{\hat{\beta}}}_k^{(m)}(y',t)=\tilde{\hat{\beta}}_k^{(m)}(y',F^{(m)}(y'),t)$, $k,l=1,\dots,n-1$, визначаються з рівностей (37), які віднесені до місцевої системи координат $\{y,t\}$.

Як і в у випадку елементарної поверхні визначимо функцію

$$\hat{\Gamma}_m(y,t;\eta,\tau)=\bar{\hat{P}}_m(y',t;\eta',\tau)\bar{\hat{\nu}}_n^{(m)}(\eta'),\qquad 0\le\tau<t\le T,\quad y',\eta'\in\bar{S}_{2,0}^{(m)},$$

де функція $\bar{\hat{P}}_m(y',t;\eta',\tau)$ — ф.р. рівномірно параболічного рівняння зі сталими коефіцієнтами

$$\sum_{k,l=1}^{n-1}\bar{\tilde{\hat{\beta}}}_{kl}^{(m)}(\eta',\tau)D_{kl}\bar{u}_2^{(m)}(y',t)-D_t\bar{u}_2^{(m)}(y',t)=0.$$

Далі повертаємося до координат $\{x,t\}$ і записуємо функцію $\hat{\Gamma}_m(y,t;\eta,\tau)$ у цих змінних:

$$\Gamma_m(x,t;\xi,\tau) = P_m(x,t;\xi,\tau)\hat{\nu}_n^{(m)}(\eta(\xi)). \tag{47}$$

Нарешті визначимо функцію

$$\Gamma_0(x,t;\xi,\tau) = \sum_{m=1}^{N} \omega^{(m)}(x)\Gamma_m(x,t;\xi,\tau)\alpha^{(m)}(\xi),$$

де N — число фіксованих точок $x^{(1)},\ldots,x^{(N)}$ на поверхні S, в яких задаються локальні координати, а функції $\omega^{(m)}$, $\alpha^{(m)}$, Γ_m визначені за допомогою співвідношень (18), (19) та (47) відповідно.

Побудовану таким чином функцію Γ_0 вважаємо головною частиною ф.р. Γ рівняння (36), який, як і в попередньому випадку, шукаємо методом Леві. Побудову ф.р. Γ рівняння (36) завершено.

Використовуючи ф.р. Γ, єдиний розв'язок задачі (36), (40) можна представити у вигляді

$$u_2(x,t) = \int_S \Gamma(x,t;\xi,0)\varphi_2(\xi)d\sigma_\xi - \int_0^t d\tau \int_S \Gamma(x,t;\xi,\tau)\psi_0(\xi,\tau)d\sigma_\xi, \quad (x,t)\in\Sigma. \tag{48}$$

Отже, маємо два вирази для значень функції u_2 на Σ: співвідношення (33), де треба покласти $s=2$, $(x,t)\in\Sigma$, та співвідношення (48). Якщо прирівняти між собою їх праві частини, враховуючи при цьому (7), (9), (37) та (38), то знайдемо перше рівняння, що пов'язує невідомі функції V_m, $m=0,1,2$:

$$\int_0^t d\tau \int_{S^{(0)}} G_0(x,t;\xi,\tau)V_0(\xi,\tau)d\sigma_\xi + \sum_{l=0}^{2}\int_0^t d\tau \int_{S^{(l)}} K_{0l}(x,t;\xi,\tau)V_l(\xi,\tau)d\sigma_\xi = \Phi_0(x,t),$$

$$(x,t)\in\Sigma^{(0)}, \tag{49}$$

де $\Sigma^{(0)} = S^{(0)}\times[0,T]$, $S^{(0)}=S$, $S^{(1)}=S^{(2)}=S_1$,

$$G_0(x,t;\xi,\tau)\equiv G_2(x,t;\xi,\tau), \qquad K_{01}(x,t;\xi,\tau)\equiv 0,$$

$$K_{00}(x,t;\xi,\tau) = \frac{1}{2}\gamma(\xi,\tau)\Gamma(x,t;\xi,\tau) - \int_\tau^t ds \int_S \Gamma(x,t;\eta,s)\gamma(\eta,s)\frac{\partial G_2(\eta,s;\xi,\tau)}{\partial N(\eta,s)}\,d\sigma_\eta,$$

$$K_{02}(x,t;\xi,\tau) = G_2(x,t;\xi,\tau) - \int_\tau^t ds \int_S \Gamma(x,t;\eta,s)\gamma(\eta,s)\frac{\partial G_2(\eta,s;\xi,\tau)}{\partial N(\eta,s)}\,d\sigma_\eta,$$

$$\Phi_0(x,t) = \int_S \Gamma(x,t;\xi,0)\varphi_2(\xi)d\sigma_\xi - \sum_{j=2}^{3} u_2^{(j)}(x,t) -$$

$$\int_0^t d\tau \int_S \Gamma(x,t;\xi,\tau)\left[\psi(\xi,\tau) - \gamma(\xi,\tau)\sum_{j=2}^{3}\frac{\partial u_2^{(j)}(\xi,\tau)}{\partial N(\xi,\tau)}\right]d\sigma_\xi. \tag{50}$$

Друге і третє рівняння для V_m, $m=0,1,2$, отримаємо з умови спряження (26). Як і у випадку крайової умови, перетворимо рівність (26), виділивши в ній у виразах, що містять похідні першого порядку за просторовими змінними, окремо тангенціальну і конормальну складові за допомогою співвідношень:

$$(\beta^{(1)},\nabla u_2) = \sum_{i=1}^{n}\beta_i^{(1)}(x,t)\tilde{\delta}_i^{(2)}u_2 + \gamma_2(x,t)\frac{\partial u_2(x,t)}{\partial N^{(2)}(x,t)},$$

$$(\alpha,\nabla u_1) = \sum_{i=1}^{n}\alpha_i(x,t)\tilde{\delta}_i^{(1)}u_1 + \gamma_1(x,t)\frac{\partial u_1(x,t)}{\partial N^{(1)}(x,t)}, \tag{51}$$

де $\tilde{\delta}_i^{(s)} = D_i - \frac{\nu_i^{(1)}}{(N^{(s)},\nu^{(1)})}\sum_{k=1}^{n} N_k^{(s)}D_k$, $i=1,\ldots,n$, $s=1,2$, — дотичні диференціальні оператори на S_1,

$$\gamma_1(x,t) = \frac{(\alpha(x,t),\nu^{(1)}(x))}{(N^{(1)}(x,t),\nu^{(1)}(x))}, \qquad \gamma_2(x,t) = \frac{(\beta^{(1)}(x,t),\nu^{(1)}(x))}{(N^{(2)}(x,t),\nu^{(1)}(x))}.$$

Враховуючи (51) та (25), умову спряження (26) можна переписати у вигляді:

$$\tilde{L}_4u(x,t) \equiv \sum_{i,j=1}^{n}\beta_{ij}^{(1)}(x,t)\delta_i^{(1)}\delta_j^{(1)}u_2 + \sum_{i=1}^{n}\beta_i^{(1)}(x,t)\tilde{\delta}_i^{(2)}u_2 - \sum_{i=1}^{n}\alpha_i(x,t)\tilde{\delta}_i^{(1)}u_2 +$$

$$\tilde{\beta}_0^{(1)}(x,t)u_2 - D_tu_2 = \tilde{\theta}(x,t), \qquad (x,t)\in\Sigma_1\backslash S_1, \tag{52}$$

або

$$\tilde{L}_4u(x,t) \equiv \sum_{k,l=1}^{n}\tilde{\beta}_{kl}^{(1)}(x,t)D_{kl}u_2 + \sum_{k=1}^{n}\tilde{\beta}_k^{(1)}(x,t)D_ku_2 + \tilde{\beta}_0^{(1)}(x,t)u_2 - D_tu_2 = \tilde{\theta}(x,t), \tag{53}$$

де

$$\tilde{\beta}_{kl}^{(1)}(x,t) = \sum_{i,j=1}^{n}\beta_{ij}^{(1)}(x,t)\tau_{ik}^{(1)}(x)\tau_{jl}^{(1)}(x), \quad k,l=1,\ldots,n,$$

$$\tilde{\beta}_0^{(1)}(x,t) = \beta_0^{(1)}(x,t) + \alpha_0(x,t),$$

$$\tilde{\beta}_k^{(1)}(x,t) = \beta_k^{(1)}(x,t) - \alpha_k(x,t) + \sum_{s=1}^{2}(-1)^{s-1}\gamma_s(x,t)N_k^{(s)}(x,t) - \sum_{i,j=1}^{n}\beta_{ij}^{(1)}(x,t)\delta_i(\nu_j^{(1)}(x)\nu_k^{(1)}(x)),$$

$$\tilde{\theta}(x,t) = \theta_0(x,t) + \sum_{s=1}^{2}(-1)^{s-1}\gamma_s(x,t)\frac{\partial u_s(x,t)}{\partial N^{(s)}(x,t)},$$

$$\theta_0(x,t) = \theta(x,t) - \alpha_0(x,t)z(x,t) + \sum_{i=1}^{n}\alpha_i(x,t)\tilde{\delta}_i^{(1)}(x,t)z(x,t). \tag{54}$$

Міркуючи як і у випадку крайової умови, розглядатимемо (52) або (53) як автономне параболічне рівняння на $\Sigma_1 \backslash S_1$. У цьому рівнянні, як випливає з умов теореми, умови (34), формул (54) та властивостей потенціалів (див. п. 2), його коефіцієнти та права частина належать до класу $H^{\lambda,\lambda/2}$. Тоді для розв'язку u_2 цього рівняння, який задовольняє початкову умову

$$u_2(x,0) = \varphi_2(x), \qquad x \in S_1, \tag{55}$$

справедлива нерівність

$$\|u_2\|_{H^{2+\lambda,(2+\lambda)/2}(\Sigma_1)} \le C\left[\|\tilde{\theta}\|_{H^{\lambda,\lambda/2}(\Sigma_1)} + \|\varphi_2\|_{H^{2+\lambda}(S_1)}\right]. \tag{56}$$

Розв'язок задачі (53), (55) можна представити у вигляді

$$u_2(x,t) = \int\limits_{S_1} \Gamma_1(x,t;\xi,0)\varphi_2(\xi)d\sigma_\xi - \int\limits_0^t d\tau \int\limits_{S_1} \Gamma_1(x,t;\xi,\tau)\tilde{\theta}(\xi,\tau)d\sigma_\xi, \quad (x,t) \in \Sigma_1, \tag{57}$$

де $\Gamma_1(x,t;\xi,\tau)$ — ф.р. оператора $\tilde{L}_4$, існування якого забезпечують умови теореми.

Як і в попередньому випадку, маємо два вирази для значень функції u_2 на Σ_1: співвідношення (33), де треба покласти $s=2$, $(x,t) \in \Sigma_1$, та співвідношення (57). Прирівнюючи між собою їх праві частини, враховуючи при цьому (6)–(8), знаходимо друге рівняння, що пов'язує невідомі функції V_m, $m = 0,1,2$. Третє рівняння для V_m отримаємо, використовуючи (57) та умову спряження (25). Тоді система рівнянь відносно невідомих щільностей V_m, $m = 0,1,2$, матиме вигляд:

$$\int\limits_0^t d\tau \int\limits_{S^{(m)}} G_m(x,t;\xi,\tau)V_m(\xi,\tau)d\sigma_\xi + \sum_{l=0}^{2} \int\limits_0^t d\tau \int\limits_{S^{(l)}} K_{ml}(x,t;\xi,\tau)V_l(\xi,\tau)d\sigma_\xi = \Phi_m(x,t),$$

$$(x,t) \in \Sigma^{(m)}, \quad m = 0,1,2, \tag{58}$$

де $\Sigma^{(m)} = S^{(m)} \times [0,T]$, $m = 0,1,2$.

$$K_{10}(x,t;\xi,\tau) = \int\limits_\tau^t ds \int\limits_{S_1} \Gamma_1(x,t;\eta,s)\gamma_2(\eta,s)\frac{\partial G_2(\eta,s;\xi,\tau)}{\partial N^{(2)}(\eta,s)}\, d\sigma_\eta,$$

$$K_{20}(x,t;\xi,\tau) = K_{10}(x,t;\xi,\tau) + G_2(x,t;\xi,\tau),$$

$$K_{ml}(x,t;\xi,\tau) = (-1)^{l-1}\frac{1}{2}\,\gamma_l(\xi,\tau)\Gamma_1(x,t;\xi,\tau) +$$

$$\int\limits_\tau^t ds \int\limits_{S_1} \Gamma_1(x,t;\eta,s)\gamma_l(\eta,s)\frac{\partial G_l(\eta,s;\xi,\tau)}{\partial N^{(l)}(\eta,s)}\, d\sigma_\eta, \qquad m,l = 1,2,$$

$$\Phi_m(x,t) = \int\limits_{S_1} \Gamma_1(x,t;\xi,0)\varphi_2(\xi)d\sigma_\xi - \sum_{l=2}^{3} u_m^{(l)}(x,t) + z_m(x,t) -$$

$$\int\limits_0^t d\tau \int\limits_{S_1} \Gamma_1(x,t;\xi,\tau)\left[\theta_0(\xi,\tau) + \sum_{i=1}^{2}\sum_{j=2}^{3}(-1)^{i-1}\gamma_i(\xi,\tau)\frac{\partial u_i^{(j)}(\xi,\tau)}{\partial N^{(i)}(\xi,\tau)}\right] d\sigma_\xi, \qquad m = 1,2,$$

$$z_1(x,t) \equiv z(x,t), \qquad z_2(x,t) \equiv 0, \tag{59}$$

а K_{0m}, $S^{(m)}$, $m = 0,1,2$, Φ_0 визначають за формулами (50).

При цьому для ядер K_{ml}, $m,l = 0,1,2$, з (50) та (59) є правильною нерівність (4), в якій замість n, r і p треба покласти відповідно $n-1$, 0 і 0, а для функцій Φ_m, $m = 0,1,2$, як випливає з припущень теореми, умов узгодження (30) та властивостей потенціалів, виконується умова

$$\Phi_m \in \overset{\circ}{H}{}^{2+\lambda,(2+\lambda)/2}(\Sigma^{(m)}), \qquad m = 0,1,2.$$

Система рівнянь (58) є системою інтегральних рівнянь Вольтерри I роду. На підставі (22), леми 3.2 та умов теореми переконуємося в тому, що після застосування оператора $\mathcal{E}_m$, $m = 0,1,2$, до відповідного рівняння системи (58) остання замінюється еквівалентною системою інтегральних рівнянь Вольтерри II роду вигляду ($(x,t) \in \Sigma^{(m)}$, $m = 0,1,2$):

$$V_m(x,t) + \sum_{l=0}^{2} \int\limits_0^t d\tau \int\limits_{S^{(l)}} R_{ml}(x,t;\xi,\tau)V_l(\xi,\tau)d\sigma_\xi = \Psi_m(x,t), \quad m = 0,1,2, \tag{60}$$

де

$$\Psi_m(x,t) = \left(A_m(x,t)\nu^{(m)}(x), \nu^{(m)}(x)\right)^{-1/2} \mathcal{E}_m(x,t)\Phi_m,$$

$$A_0(x,t) \equiv A_2(x,t), \qquad \nu^{(0)}(x) = \nu(x), \qquad \nu^{(1)}(x) = \nu^{(2)}(x),$$

до того ж $\mathcal{E}_m\Phi_m \in \overset{\circ}{H}{}^{1+\lambda,(1+\lambda)/2}(\Sigma^{(m)})$, $\Phi_m \in \overset{\circ}{H}{}^{\lambda,\lambda/2}(\Sigma^{(m)})$, а для ядер R_{ml}, $m,l = 0,1,2$, справедлива нерівність (10).

Розв'язуючи систему рівнянь (60) методом послідовних наближень знаходимо V_m, $m = 0,1,2$. Крім цього, доводимо, що для V_m, $m = 0,1,2$, виконується умова (34).

Для завершення доведення теореми, залишилося перевірити виконання умови (31), оцінки (32) та обґрунтувати єдиність побудованого розв'язку задачі (23)–(27). Для цього достатньо зауважити, що кожну з побудованих за формулами (33), (60) функцій u_s, $s = 1,2$, можна розглядати як розв'язок наступної параболічної першої крайової задачі:

$$L_s u_s(x,t) = -f_s(x,t), \qquad (x,t) \in \Omega_s, \qquad s = 1,2,$$

$$u_s(x,0) = \varphi_s(x), \qquad x \in \mathcal{D}_s, \qquad s = 1,2,$$

$$u_s(x,t) = v_1(x,t) + (2-s)z(x,t), \qquad (x,t) \in \Sigma_1, \qquad s = 1,2,$$

$$u_2(x,t) = v(x,t), \qquad (x,t) \in \Sigma, \tag{61}$$

при виконанні умов узгодження

$$\varphi_s(x) = v_1(x,0) + (2-s)z(x,0), \qquad x \in S_1, \qquad s = 1,2,$$

$$\varphi_2(x) = v(x,0), \qquad x \in S,$$

$$\left.\frac{\partial u_s(x,t)}{\partial t}\right|_{t=0} = \left.\frac{\partial v_1(x,t)}{\partial t}\right|_{t=0} + (2-s)\left.\frac{\partial z(x,t)}{\partial t}\right|_{t=0}, \quad x \in S_1, \qquad s = 1,2,$$

$$\left.\frac{\partial u_2(x,t)}{\partial t}\right|_{t=0} = \left.\frac{\partial v(x,t)}{\partial t}\right|_{t=0}, \quad x \in S, \tag{62}$$

де функції $v_1 \in H^{2+\lambda,(2+\lambda)/2}(\Sigma_1)$ та $v \in H^{2+\lambda,(2+\lambda)/2}(\Sigma)$ визначені за допомогою співвідношень (57) і (48) відповідно. Тоді (див. [6]) умови теореми разом з умовами (30), оцінками (56) та (41) гарантують нам існування єдиного розв'язку задачі (61), (62), що належить до класу (31), і для якого справедлива оцінка (32). Теорема доведена. □

Література

1. Апушкинская Е.А., Назаров А.И. *Начально-краевая задача с граничным условием Вентцеля для недивергентных параболических уравнений* // РАН, Алгебра и анализ. – 1994. – 6, вып. 6. – С. 1–29.
2. Бадерко Е.А. *О решении первой краевой задачи для параболического уравнения с помощью потенциала простого слоя* // Докл. АН СССР. – 1985. – Т. 283, №1. – С. 11–13.
3. Вентцель А.Д. *О граничных условиях для многомерных диффузионных процессов* // Теория вероятн. и ее применения. – 1959. – 4, №2. – С. 172–185.
4. Житарашу Н.В., Эйдельман С.Д. Параболические граничные задачи. – Кишенев: Штиница, 1992. — 328 с.
5. Ивасишен С.Д. Матрицы Грина параболических граничных задач. — Киев: Вища школа, 1990. — 200 с.
6. Ладыженская О.А., Солонников В.А., Уральцева Н.Н. Линейные и квазилинейные уравнения параболического типа. — М. : Наука, 1967. — 736 с.
7. Матійчук М.І. Параболічні та еліптичні крайові задачі з особливостями. — Чернівці: Прут, 2003. — 248 с.
8. Портенко М.І. Процеси дифузії в середовищах з мембранами. — Інститут математики НАН України. Київ, 1995. — 199 с.
9. Солонников В.А. *О краевых задачах для линейных параболических систем дифференциальных уравнений общего вида* // Труды Мат. Ин-та им. В.А. Стеклова АН СССР. 1965. №83. С. 3–162.
10. Цаповська Ж.Я. *Розв'язання методом потенціалів параболічної початково-крайової задачі з оператором типу Вентцеля в умові спряження* // Мат. методи і фіз.-мех. поля. – 1999. – 42, №2. – С.39–46.
11. Копитко Б.І., Цаповська Ж.Я. *Початково-крайова задача з умовою спряження типу Вентцеля для параболічного рівняння з розривними коефіцієнтами* // Мат. методи і фіз.-мех. поля. – 2008. – 51, №1. – С. 7–16.
12. Кічура С., Цаповська Ж. *Класична розв'язність однієї крайової задачі для параболічного рівняння з розривними коефіцієнтами* // Математичний вісник НТШ. – 2009. – Т. 6. – С. 140–154.
13. Цаповська Ж.Я. *Параболічна початково-крайова задача з умовою спряження типу Вентцеля та конормальною похідною в крайовій умові* // Мат. Студії. – 2010. – Т. 33, № 1. – С. 107–112.
14. Черепова М.Ф. *Решение методом потенциала I-ой краевой задачи для параболического уравнения 2-го порядка в нецилиндрической области* // М.: 1985. – Деп. в ВИНИТИ 11.01.85. – № 361-85 Деп.
15. Yi Zeng and Yousong Luo. *Linear Parabolic Equations with Ventsel Initial Boundary Conditions*, Bull. Austral. Math. Soc., **51**(1995), 465–479.

Львівський національний університет ім. І. Франка,

Львів, Україна

Надійшло 18.11.2010

Kopytko B.I., Mylyo O.Ya., Tsapovska Zh.Ya. *A parabolic conjugation problem with general boundary condition and a conjugation condition of Wentzel type*, Carpathian Mathematical Publications, **2**, 2 (2005), 55–73.

We consider the question of existence in Holder class of a solution of an initial-boundary problem for linear parabolic second-degree equation with discontinuous coefficients with a boundary condition and a conjugation condition which are defined by linear parabolic second-degree operators as well as equation in the domain.

Копытко Б.И., Мыле О.Я., Цаповская Ж.Я. *Параболическая задача сопряжения с общим краевым условием и условием сопряжения типа Вентцеля* // Карпатские математические публикации. — 2005. — Т.2, №2. — С. 55–73.

В статье рассматривается вопрос о существовании в классе Гельдера решения начально-краевой задачи для линейного параболического уравнения второго порядка с разрывными коэффициентами с краевым условием и условием сопряжения, которые, как и уравнение в области, определяются линейными параболическими операторами второго порядка.

Карпатські математичні публікації. Т.2, №2

Carpathian Mathematical Publications. V.2, №2

УДК 517.956.4

Малицкая А.П., Буртняк И.В.

МЕТОД ПАРАМЕТРИКСА ДЛЯ УЛЬТРАПАРАБОЛИЧЕСКИХ СИСТЕМ

Малицкая А.П., Буртняк И.В. *Метод параметрикса для ультрапараболических систем* // Карпатские математические публикации. — 2010. — Т.2, №2. — С. 74–82.

Рассмотрено системы ультрапараболических уравнений, которые обобщают уравнение диффузии с инерцией. Используя модифицированный метод Леви, построено фундаментальную матрицу решений системы уравнений Колмогорова второго порядка, получено оценки ее производных, входящих в систему.

Мы рассматриваем один класс ультрапараболических систем, обобщающих уравнение диффузии с инерцией. Фундаментальная матрица решений задачи Коши (ФМРЗК) для таких систем, коэффициенты которой зависят от t, построеная в работах [1, 2]. В этой статье построено фундаментальную матрицу решений системы (ф.м.р.), коэффициенты которой зависят от всех переменных. Для построения мы используем дважды метод Леви.

1 Обозначение. Постановка задачи. Основной результат

Пусть $x = (x_1, x_2) \in R^2$. $\Pi_{(0,T]} = \{(t,x), x \in R^2, 0 \le t \le T\}$, $0 \le \tau < t$, $\rho(t,x;\tau,\xi) = (x_1-\xi_1)^2(4(t-\tau))^{-1} + 3(x_2-\xi_2+(x_1+\xi_1)(2(t-\tau))^{-1})^2(t-\tau)^{-3}$, $n \in N$.

Рассмотрим задачу Коши для системы [1], [2]:

$$\partial_t u_\nu(t,x) - x_1\partial_{x_2}u_\nu(t,x) = \sum_{r=1}^{n}[a_2^{r\nu}(t,x)\partial_{x_1}^2 + a_1^{r\nu}(t,x)\partial_{x_1} + a_0^{r\nu}(t,x)]u_r(t,x),$$

$$\nu = \{1,...,n\}, (t,x) \in \Pi_{(0,T]}, \tag{1}$$

$$u_\nu(t,x)|_{t=\tau} = u_{\nu 0}(x), \quad 0 \le \tau < t \le T, \tag{2}$$

2000 *Mathematics Subject Classification:* 42A38, 46H30.

Ключевые слова и фразы: метод параметрикса, фундаментальная матрица решений, ультрапараболические системы.

где $\partial_t w_\nu(t,x) = \sum_{r=1}^{n}[a_2^{r\nu}(t,x)\partial_{x_1}^2 + a_2^{r\nu}(t,x)\partial_{x_1} + a_0^{r\nu}(t,x)]w_r(t,x)$ — равномерно параболическая за Петровским в $\Pi_{[0,T]}$, (x_2 — параметр); т.е., для $\forall\sigma_1 \in R^1$, $det\{\sum_{k=2} a_k(t,x)(i\sigma_1)^2 - \lambda I\} = 0$ имеет корни $\lambda_j(t,x)$, $j = \{1,...,n\}$, удовлетворяющие условию

$$Re\lambda_j(t,x) < -\delta|\sigma_1|^2 \tag{3}$$

для $(t,x) \in \Pi_{[0,T]}, \delta > 0$, δ не зависит от (t,x), $j = \{1,...,n\}$, I — единичная матрица, $\sqrt{-1} = i, a_k = (a_k^{r\nu})_{r,\nu=1}^n$. Коэффициенты системы (1) удовлетворяют условиям:

А) $a_j^{r\nu}(t,x)$, $j = \{0,1,2\}$ — комплекснозначные, непрывывные и ограниченые функции, $(t,x) \in \Pi_{[0,T]}$;

Б) $a_j^{r,\nu} = a_j^{\nu,r}$, $j = \{0,1,2\}$, $\{r\nu\} \subset \{1,...,n\}$;

В) $|a_j^{r\nu}(t,x) - a_j^{r\nu}(t,x')| \le K(|x_1-x_1'|^{\alpha_1} + |x_2-x_2'|^{\alpha_2})$, $\forall\{(t,x),(t,x')\} \subset \Pi_{[0,T]}$, $\alpha_1 \in (0,1]$, $\alpha_2 \in (\frac{1}{3},1]$, $K > 0$ — постоянная, независящая от t,x,x';

Г) существуют непрерывные, ограниченые $\partial_{x_1}^j a_j^{r\nu}(t,x), j = \{0,1,2\}$, удовлетворяющие условию В).

Определения ф.м.р. системы (1). Ф.м.р. системы (1) называется матрица

$$\mathcal{E}(t,x;\tau,\xi), \quad \{(t,x),(\tau,\xi)\} \subset \Pi_{[0,T]}, \quad t > \tau,$$

такая что вектор-функция

$$u(t,x) = \int_\tau^t d\beta \int_{R^2} \mathcal{E}(t,x;\beta,\gamma)f(\beta,\gamma)d\gamma$$

для любой финитной гладкой функции $f(t,x)$ является решениям неоднородной системы

$$\partial_t u(t,x) - x_1\partial_{x_2}u_(t,x) = \sum_{k=0}^{2} a_k(t,x)\partial_{x_1}^k u(t,x) + f(t,x), (t,x) \in \Pi_{(\tau,T]}. \tag{4}$$

Теорема 1. *Если система (1) удовлетворяет условиям А), Б), В), то существует ф.м.р. $\mathcal{E}(t,x;\tau,\xi)$, $t > \tau$. Если еще выполняеться условие Г), то существует ф.м.р. сопряженой системы к (1) $\mathcal{E}^*(t,x;\tau,\xi)$, $t > \tau$, при этом $\mathcal{E}'(t,x;\tau,\xi) = \mathcal{E}^*(t,x;\tau,\xi)$, и имеют место оценки*

$$|\partial_{x_1}^k \mathcal{E}(t,x;\tau,\xi)| \le C_k(t-\tau)^{-\frac{4+k}{2}} \exp\{-c\rho(t,x;\tau,\xi)\}, \quad 0 \le k \le 2, \tag{5}$$

$$|\partial_{x_2}\mathcal{E}(t,x;\tau,\xi)| \le C_1(t-\tau)^{-\frac{7}{2}} \exp\{-c\rho(t,x;\tau,\xi)\}, \tag{6}$$

$$|\Delta_{h_1}\partial_{x_1}^k\mathcal{E}(t,x;\tau,\xi)| \le C_k(t-\tau)^{-\frac{4+k+\alpha_1}{2}}|h_1|^{\alpha_1}\max[\exp\{-c\rho(t,x^*;\tau,\xi)\},$$
$$\exp\{-c\rho(t,x;\tau,\xi)\}], \quad x^* = (x_1+h_1, x_2), \tag{7}$$

$$|\Delta_{h_2}\partial_{x_2}\mathcal{E}(t,x;\tau,\xi)| \le C_1(t-\tau)^{-\frac{7+3\alpha_2}{2}}|h_2|^{\alpha_2}\max[\exp\{-c\rho(t,x^{**};\tau,\xi)\},$$
$$\exp\{-c\rho(t,x;\tau,\xi)\}], \quad x^{**} = (x_1, x_2+h_2), \tag{8}$$

где положительные постоянные c, C_k, C_1 зависят от $\delta, \alpha_1, \alpha_2, \sup_{\Pi_{[0,T]}}|a_k(t,x)|, T$, от характера непрывывности $a_2(t,x)$.

Ф.м.р. системы (1) (случай слоя). Построение ф.м.р. системы будем проводить в два этапа. Сначала рассмотрим вспомагательную систему, построенную в соответствии с системой (1), т.е.

$$\partial_t u(t,x) - x_1\partial_{x_2}u(t,x) = \sum_{k=1}^{2} a_k(t,y_0,y_2-y_1(t-\tau))\partial_{x_1}^k u(t,x), \tag{9}$$

где (y_0,y_1,y_2,τ) — параметры, $t>\tau$, $(y_0,y_1,y_2)\in R^3$.

Используя методику [1, 2], построим матрицу Грина (ФМРЗК) для системы (9)

$$\mathcal{E}_0(t,x;\tau,\xi,y_0,y(t,\tau)),\, y(t,\tau)=y_2-y_1(t-\tau).$$

Исходя из задачи Коши для (9) с началь–пыми условиями при $t=\tau$, $\tau\ge 0$, построим ф.м.р. для системы, где $y_0=x_1$.

$$\partial_t u(t,x) - x_1\partial_{x_2}u(t,x) = \sum_{k=1}^{2} a_k(t,x_1,y_2-y_1(t-\tau))\partial_{x_1}^k u(t,x). \tag{10}$$

Используя метод Э.Э. Леви, будем отискивать ф.м.р. системы (10) $Z_0(t,x;\tau,\xi,y(t,\tau))$ в виде:

$$Z_0(t,x;\tau,\xi,y(t,\tau)) = \mathcal{E}_0(t,x;\tau,\xi,\xi_1,y(t,\tau))+$$

$$\int_\tau^t d\beta\int_{R^2}\mathcal{E}_0(t,x;\beta,\gamma,\gamma_1,y(t,\tau))\varphi(\beta,\gamma;\tau,\xi,y(\beta,\tau))d\gamma = \mathcal{E}_0+W, \tag{11}$$

где матрица $\varphi(t,\gamma;\tau,\xi,y(t,\tau))$ подобрана так, чтобы $Z_0(t,x;\tau,\xi,y(t,\tau))$ при $t>\tau$, как функция t,x, была решением системы (10). При этом будем предполагать, что $\varphi(t,\gamma;\tau,\xi,$ $y(t,\tau))$ и $\varphi'_{x_2}(t,\gamma;\tau,\xi,y(t,\tau))$ — непрерывны как функции своих аргументов и справедливы оценки:

$$|\varphi(t,\gamma;\tau,\xi,y(t,\tau))| \le C(t-\tau)^{-\frac{6+\alpha_1}{2}}\exp\{-c\rho(t,x;\tau,\xi)\}, \tag{12}$$

$$|\varphi'_{x_2}(t,\gamma;\tau,\xi,y(t,\tau))| \le C_1(t-\tau)^{-\frac{9+\alpha_1}{2}}\exp\{-c\rho(t,x;\tau,\xi)\}, \tag{13}$$

$$|\Delta_{h_1}\varphi(t,\gamma;\tau,\xi,y(t,\tau))| \le C_k(t-\tau)^{-\frac{6+\alpha_1'}{2}}|h_1|^{\alpha_1''}\max[\exp\{-c\rho(t,x^*;\tau,\xi)\},$$

$$\exp\{-c\rho(t,x;\tau,\xi)\}],\quad \alpha_1'<\alpha_1,\quad \alpha_1''=\alpha_1-\alpha_1'. \tag{14}$$

Эти априорные ограничения будут доказаны потом. Применяя оператор $\partial_t - x_1\partial_{x_2} - \sum_{k=1}^{2} a_k(t,x,y(t,\tau))\partial_{x_1}^k$ к $Z_0(t,x;\tau,\xi,y(t,\tau))$, определенной формулой (11), и используя априорные оценки и предположения, получим относительно $\varphi(t,x;\tau,\xi,y(t,\tau))$ интегральное уравнение

$$\varphi(t,x;\tau,\xi,y(t,\tau)) = K(t,x;\tau,\xi,y(t,\tau))+$$

$$\int_\tau^t d\beta\int_{R^2} K(t,x;\beta,\gamma,y(t,\beta))\varphi(\beta,\gamma;\tau,\xi,y(\beta,\tau))d\gamma, \tag{15}$$

где

$$K(t,x;\tau,\xi,y(\beta,\tau)) = \{\sum_{k=1}^{2}[a_k(t,x;y(t,\tau)) - a_k(t,\xi_1;y(t,\tau))]\}\partial_{x_1}^k \times \mathcal{E}_0(t,x;\tau,\xi,\xi_1,y(t,\tau)).$$

В силу оценок для производных $\mathcal{E}_0(t,x;\tau,\xi,\xi_1,y(t,\tau))$ (див. [1, 2])

$$|\partial_{x_1}^k\partial_{x_2}^l\mathcal{E}_0(t,\gamma;\tau,\xi,y(t,\tau))| \le C_{kl}(t-\tau)^{-\frac{4+k+3l}{2}}\exp\{-c\rho(t,x;\tau,\xi)\}. \tag{16}$$

при $t>\tau$, $\{x,\xi\}\in R^2$.

Оценим $K(t,\gamma;\tau,\xi,y(t,\tau))$:

$$|K(t,\gamma;\tau,\xi,y(t,\tau))| \le |\sum_{k=1}^{2}[a_k(t,x_1;y(t,\tau)) - a_k(t,\xi_1;y(t,\tau))]\times$$

$$\partial_{x_1}^k\mathcal{E}_0(t,x;\tau,\xi,\xi_1,y(t,\tau))| \le A(t-\tau)^{-\frac{6-\alpha_1}{2}}\exp\{-c\rho)\}. \tag{17}$$

Будем искать $\varphi(t,\gamma;\tau,\xi,y(t,\tau))$ в виде:

$$\varphi(t,\gamma;\tau,\xi,y(t,\tau)) = \sum_{m=1}^{\infty} K_m(t,\gamma;\tau,\xi,y(t,\tau)), \tag{18}$$

$$K(t,\gamma;\tau,\xi,y(t,\tau)) \equiv K_1(t,\gamma;\tau,\xi,y(t,\tau)),$$

$$K_m(t,\gamma;\tau,\xi,y(t,\tau)) = \int_\tau^t d\beta\int_{R^2} K_1(t,x;\beta\gamma;y(t,\beta))K_{m-1}(\beta,\gamma;\tau,\xi,y(\beta,\tau))d\gamma.$$

Оценим члены ряда (18)

$$|K_2(t,x;\tau,\xi,y(t,\tau))| \le A^2\int_\tau^t\frac{d\beta}{[(t-\beta)(\beta-\tau)]^{\frac{2-\alpha_1}{2}}}\int_{R^2}\exp\{-c\rho(t,x;\beta,\gamma)\}(t-\beta)^{-2}$$

$$\exp\{-c\rho(\beta,\gamma;\tau,\xi)\}(\beta-\tau)^{-2}d\gamma = A^2B(\frac{\alpha_1}{2},\frac{\alpha_1}{2})(\frac{\pi}{C})(t-\tau)^{\frac{2\alpha_1-6}{2}}\exp\{-c\rho(t,x;\tau,\xi)\}$$

(последние интегралы легко вычисляются).

Оценка $K_3(t,x;\tau,\xi,y(t,\tau))$, $K_4(t,x;\tau,\xi,y(t,\tau))$ и т.д. проводится совершенно так же; при этом с помощю индукции легко доказать то, что для любого m

$$|K_m(t,\gamma;\tau,\xi,y(t,\tau))| \le \frac{\Gamma^m(\frac{\alpha_1}{2})}{\Gamma(\frac{m\alpha_1}{2})}A^m(\frac{\pi}{C})^{m-1}(t-\tau)^{\frac{m\alpha_1-6}{2}}\exp\{-c\rho\}. \tag{19}$$

Из оценок (19) вытекает равномерная и абсолютная сходимость ряда (18) при $t-\tau\ge\varepsilon>0$ и справедливость оценки (12).

Так, как

$$|\partial_{x_2}K(t,x;\tau,\xi,y(t,\tau))| \le C_1(t-\tau)^{-\frac{9-\alpha_1}{2}}\exp\{-c\rho(t,x;\tau,\xi)\} \tag{20}$$

и

$$-\partial_{x_2}K(t,x;\tau,\xi,y(t,\tau)) = \partial_{\xi_2}K(t,x;\tau,\xi,y(t,\tau)), \partial_{x_2}K_2(t,x;\tau,\xi,y(t,\tau)) =$$

$$\int_{\tau}^{\frac{t+\tau}{2}} d\beta \int_{R^2} \partial_{x_2}K(t,x;\beta,\gamma,y(t,\beta))K(\beta,\gamma;\tau,\xi,y(t,\tau))d\gamma +$$

$$\int_{\frac{t+\tau}{2}}^{t} d\beta \int_{R^2} K(t,x;\beta,\gamma,y(t,\beta))\partial_{\gamma_2}K(\beta,\gamma;\tau,\xi,y(t,\tau))d\gamma,$$

$$|\partial_{x_2}K_2(t,x;\tau,\xi,y(t,\tau))| = |\partial_{\xi_2}K_2(t,x;\tau,\xi,y(t,\tau))| \le C_1^2(t-\tau)^{-\frac{9-2\alpha_1}{2}}\times$$

$$\exp\{-c\rho(t,x;\tau,\xi)\}B(\frac{\alpha_1}{2};\frac{\alpha_1}{2})(\frac{\pi}{C}), \qquad (21)$$

то по индукции для любого m получим

$$|\partial_{x_2}K_m(t,x;\tau,\xi,y(t,\tau))| \le C_1^m(t-\tau)^{\frac{m\alpha_1-9}{2}}\exp\{-c\rho\}\frac{\Gamma^m(\frac{\alpha_1}{2})}{\Gamma(\frac{\alpha_1}{2})}(\frac{\pi}{C})^{m-1}. \qquad (22)$$

В силу оценок (20)–(22) ряд $\sum\limits_{m=1}^{\infty}\partial_{x_2}K_m(t,x;\tau,\xi,y(t,\tau))$ сходится равномерно и абсолютно при $t-\tau\ge\varepsilon>0$, поэтому $\varphi'_{x_2}(t,x;\tau,\xi,y(t,\tau)) = \sum\limits_{m=1}^{\infty}\partial_{x_2}K_m(t,x;\tau,\xi,y(t,\tau))$ непрерывна по t,x, при $t-\tau\ge\varepsilon>0$ справедлива оценка (13).

Оценка (14) доказывается, как в параболическом случае [3, с. 30-31]. Поскольку

$$\partial_{x_2}W = \int_{\tau}^{\frac{t+\tau}{2}} d\beta\int_{R^2}\partial_{x_2}\mathcal{E}_0(t,x;\beta,\gamma,\gamma_1,y(t,\beta))\varphi(\beta,\gamma;\tau,\xi,y(t,\tau))d\gamma +$$

$$\int_{\frac{t+\tau}{2}}^{t} d\beta\int_{R^2}\mathcal{E}_0(t,x;\beta,\gamma,y(t,\beta))\varphi'_{\gamma_2}(\beta,\gamma;\tau,\xi,y(t,\tau))d\gamma,$$

то $|\partial_{x_2}W| \le C_1(t-\tau)^{-\frac{9-\alpha_1}{2}}\exp\{-c\rho(t,x;\tau,\xi)\}$.

Заметим, что существование $\partial_{x_1}^2W$, $\partial_{x_1}W$, ∂_tW доказывается аналогично, как в параболическом случае [3, с. 30-31], отсюда имеем

$$|\partial_{x_2}^kZ_0(t,x;\tau,\xi,y(t,\tau))| \le C_k(t-\tau)^{-\frac{4+k}{2}}\exp\{-c\rho(t,x;\tau,\xi)\}. \qquad (23)$$

Следует отметить, что старшые производные $Z_0(t,x;\tau,\xi,y(t,\tau))$ удовлетворяют условию Гельдера по x_1.

Теперь выберем в качестве вспомогательной систему (10). Ф.м.р. системы (1) будем искать в виде

$$\mathcal{E}(t,x;\tau,\xi) = Z_0(t,x;\tau,\xi,\xi(t,\tau)) + \int_{\tau}^{t}d\beta\int_{R^2}Z_0(t,x;\beta,\gamma,\gamma(t,\beta))\times$$

$$\Phi(\beta,\gamma;\tau,\xi)d\gamma = Z_0(t,x;\tau,\xi,\xi(t,\tau)) + V. \qquad (24)$$

Подберем матрицу $\Phi(t,x;\tau,\xi)$ так, чтобы $\mathcal{E}(t,x;\tau,\xi)$, как функция t и x, была при $t>\tau$ решением системы (1). При этом будем предполагать, что $\Phi(t,x;\tau,\xi)$ при $t>\tau$ являяться непрерывной функцией своих аргументов, и для нее справедливы оценки

$$|\Phi(t,x;\tau,\xi)| \le C(t-\tau)^{-\frac{6-3\alpha_2}{2}}\exp\{-c\rho(t,x;\tau,\xi)\}, \qquad (25)$$

$$|\Delta_{h_2}\Phi(t,x;\tau,\xi)| \le C|h_2|^{\alpha'_2}(t-\tau)^{-\frac{6-3\alpha''_2}{2}}\max[\exp\{-c\rho(t,x;\tau,\xi)\},$$

$$\exp\{-c\rho(t,x^{**};\tau,\xi)\}], \quad \alpha'_2<\alpha_2, \quad \alpha''_2=\alpha_2-\alpha'_2. \qquad (26)$$

Эти априорные оценки будут доказаны потом. Применим оператор $\partial_t - x_1\partial_{x_2} - \sum\limits_{k=0}^{2}a_k(t,x)\partial_{x_1}^k$ к $\mathcal{E}(t,x;\tau,\xi)$, определенной формулой (24), используя априорные предположения и оценки (23), получим относительно $\Phi(t,x;\tau,\xi)$ интегральное уравнение

$$\Phi(t,x;\tau,\xi) = K(t,x;\tau,\xi) + \int_{\tau}^{t}d\beta\int_{R^2}K(t,x;\beta,\gamma,)\Phi(\beta,\gamma;\tau,\xi)d\gamma.$$

где

$$K(t,x;\tau,\xi) = \sum_{k=1}^{2}[a_k(t,x)-a_k(t,x_1;\xi(t,\tau))]\partial_{x_1}^kZ_0(t,x;\tau,\xi,\xi(t,\tau)) +$$

$$a_0(t,x)Z_0(t,x;\tau,\xi,\xi(t,\tau)).$$

В силу оценок (23) и сделаных предложений

$$|K(t,x;\tau,\xi)| \le C_1(t-\tau)^{-\frac{6-3\alpha_2}{2}}\exp\{-c\rho(t,x;\tau,\xi)\}, \qquad (27)$$

$$\Phi(t,\gamma;\tau,\xi) = \sum_{m=1}^{\infty}K_m(t,\gamma;\tau,\xi), \qquad (28)$$

$$K_1(t,x;\tau,\xi) = K(t,x;\tau,\xi),$$

$$K_m(t,\gamma;\tau,\xi) = \int_{\tau}^{t}d\beta\int_{R^2}K_1(t,x;\beta\gamma)K_{m-1}(\beta,\gamma;\tau,\xi)d\gamma.$$

Оценим члены ряда (28). Поскольку

$$|K_2(t,x;\tau,\xi)| \le A_1^2\int_{\tau}^{t}d\beta\int_{R^2}[(t-\beta)(\beta-\tau)]^{-\frac{2-3\alpha_2}{2}}\exp\{-c\rho(t,x;\beta,\gamma)\}\times$$

$$(t-\beta)^{-2}\exp\{-c\rho(\beta,\gamma;\tau,\xi)\}(\beta-\tau)^{-2}d\gamma \le A_1^2B(\frac{3\alpha_2}{2},\frac{3\alpha_2}{2})\times$$

$$(\frac{\pi}{C})(t-\tau)^{-\frac{6-6\alpha_2}{2}}\exp\{-c\rho(t,x;\tau,\xi)\}, t>\tau, \qquad (29)$$

то, как и в предыдущем случае, по индукции найдем

$$|K_m(t,x;\tau,\xi)| \le \frac{A_1^m \Gamma^m(\frac{3\alpha_2}{2})}{\Gamma(\frac{3m\alpha_2}{2})}(t-\tau)^{\frac{3m\alpha_2-6}{2}} \exp\{-c\rho(t,x;\tau,\xi)\}. \tag{30}$$

Из оценок (30) вытекает равномерная и абсолютная сходимость ряда (28) при $t-\tau \ge \varepsilon > 0$ и справедливость для $\Phi(t,x;\tau,\xi)$ априорной оценки (25).

Установим справедливость неравенства (26). При $(t-\tau)^{3/2} < |x_2 - x_2^{**}| = |h_2|$ оно следует из (25). Поэтому рассмотрим случай $|x_2 - x_2^{**}| \le (t-\tau)^{3/2}$.

$$|\Delta_{h_2} K(t,x;\tau,\xi)| \le \sum_{k=1}^{2} |\Delta_{h_2} a_k(t,x)||\partial_{x_1}^k Z_0(t,x;\tau,\xi,y(t,\tau))| + \sum_{k=1}^{2} |a_k(t,x)-$$

$$a_k(t,x_1,\xi(t,\tau))||\Delta_{h_2}\partial_{x_1}^k Z_0(t,x;\tau,\xi,\xi(t,\tau))| + |a_0(t,x)||\Delta_{h_2} Z_0(t,x;\tau,\xi,y(t,\tau)|+$$

$$|\Delta_{h_2} a_0(t,x)||Z_0(t,x;\tau,\xi,\xi(t,\tau)| \le M[|h_2|^{\alpha_2}(t-\tau)^{-3} + |x_2 - \xi_2 +$$

$$\xi_1(t-\tau)|^{\alpha_2}|h_2|(t-\tau)^{-9/2} + |h_2|(t-\tau)^{-7/2} + |h_2|^{\alpha_2}(t-\tau)^{-3}]\times$$

$$\exp\{-c\rho(t,x;\tau,\xi)\} \le |h_2|^{\alpha_2''}(t-\tau)^{-(6-3\alpha_2'')/2}\exp\{-c\rho(t,x;\tau,\xi)\}. \tag{31}$$

При проведении последних оценок члены вида $\Delta_{h_2}\partial_{x_1}^2 Z_0(t,x;\tau,\xi,\xi(t,\tau))$ представлялись по теореме о среднем, а затем оценивались. Все время использовалось элементарное неравенство; при $|x_2 - x_2'| \le (t-\tau)^{3/2}$ и $-1 \le \theta \le 1$, $-1 + \frac{|x_2-\xi_2+(x_1+\xi_1)(2(t-\tau))^{-1}|}{(t-\tau)^{3/2}} \le |\frac{x_2-\xi_2+(x_1+\xi_1)(2(t-\tau))^{-1}}{(t-\tau)^{3/2}} + \theta\frac{x_2-x_2'}{(t-\tau)^{3/2}}| \le \frac{|x_2-\xi_2+(x_1+\xi_1)(2(t-\tau))^{-1}|}{(t-\tau)^{3/2}} + 1$.

С помощью оценок (25), (31) оценим $\Delta_{h_2}\Phi(t,x;\tau,\xi)$:

$$\Delta_{h_2}\Phi(t,x;\tau,\xi) = \Delta_{h_2}K(t,x;\tau,\xi) + \int_\tau^t d\beta \int_{R^2} \Delta_{h_2}K(t,x;\beta,\gamma)\Phi(t,x;\tau,\xi)d\gamma.$$

Оценим второе слагаемое:

$$\int_\tau^t d\beta \int_{R^2} |\Delta_{h_2}K(t,x;\beta,\gamma)||\Phi(t,x;\tau,\xi)|d\gamma = \int_\tau^{t-|h_2|^{2/3}} + \int_{t-|h_2|^{2/3}}^t = I_1 + I_2,$$

в интеграле I_1 $\tau \le \beta \le t - |h_2|^{2/3}$, т.е. $t - \beta \ge |h_2|^{2/3}$, поэтому, применив оценку (31), получим

$$I_1 \le C(t-\tau)^{\frac{3(\alpha_2+\alpha_2')}{2}}|h_2|^{\alpha_2'}\exp\{-c\rho(t,x;\tau,\xi)\}. \tag{32}$$

Оценим I_2:

$$\int_{\tau-|h_2|^{2/3}}^t d\beta \int_{R^2} |K(t,x;\beta,\gamma)||\Phi(\beta,\gamma;\tau,\xi)|d\gamma + \int_{\tau-|h_2|^{2/3}}^t d\beta \int_{R^2} |K(t,x^{**};\beta,\gamma)| \times |\Phi(\beta,\gamma;\tau,\xi)|d\gamma,$$

используя оценки (25), (27), получим

$$I_1 \le C(t-\tau)^{\frac{3\alpha_2-6}{2}}\exp\{-c\rho(t,x;\tau,\xi)\} \int_{\tau-|h_2|^{2/3}}^t (t-\beta)^{\frac{3\alpha_2-1}{2}} d\beta \le$$

$$C(t-\tau)^{\frac{3\alpha_2-6}{2}}|h_2|^{\alpha_2}\exp\{-c\rho(t,x;\tau,\xi)\}. \tag{33}$$

Из неравенств (32), (33) получаем (26). Аналогично установим:

$$|\Delta_{h_1}\Phi(t,x;\tau,\xi)| \le C(t-\tau)^{\frac{\alpha_1''-6}{2}}|h_1|^{\alpha_1}\exp\{-c\rho(t,x;\tau,\xi)\}. \tag{34}$$

Матрица $\Phi(t,x;\tau,\xi)$ при $t > \tau$ непрерывна по своим аргументам, удовлетворяет оценкам (25), (26), поэтому приведенные выше построения закончены. Так, как

$$\partial_{x_1}V(t,x;\tau,\xi) = \int_\tau^t d\beta \int_{R^2} \partial_{x_1}Z_0(t,x;\beta,\gamma;\gamma(t,\beta))\Phi(\beta,\gamma;\tau,\xi)d\gamma,$$

$$\partial_{x_1}^2 V(t,x;\tau,\xi) = \int_\tau^{\frac{t+\tau}{2}} d\beta \int_{R^2} \partial_{x_1}^2 Z_0(t,x;\beta,\gamma;\gamma(t,\beta))\Phi(\beta,\gamma;\tau,\xi)d\gamma+$$

$$\int_{\frac{t+\tau}{2}}^t d\beta \int_{R^2} \partial_{x_1}^2 Z_0(t,x;\beta,\gamma;\gamma(t,\beta))[\Phi(\beta,\gamma;\tau,\xi) - \Phi(\beta,x_1;x(t,\beta);\tau,\xi)]d\gamma+$$

$$\int_{\frac{t+\tau}{2}}^t \Phi(\beta,x_1;x(t,\beta);\tau,\xi)d\beta\partial_{x_1}^2 \int_{R^2} Z_0(t,x;\beta,\gamma;\gamma(t,\beta))d\gamma. \tag{35}$$

то

$$\partial_{x_2}V(t,x;\tau,\xi) = \int_\tau^{\frac{t+\tau}{2}} d\beta \int_{R^2} \partial_{x_2}Z_0(t,x;\beta,\gamma;\gamma(t,\beta))\Phi(\beta,\gamma;\tau,\xi)d\gamma+$$

$$\int_{\frac{t+\tau}{2}}^t d\beta \int_{R^2} \partial_{x_2}Z_0(t,x;\beta,\gamma;\gamma(t,\beta))[\Phi(\beta,\gamma;\tau,\xi) - \Phi(\beta,\gamma_1;x(t,\beta);\tau,\xi)]d\gamma+$$

$$\int_{\frac{t+\tau}{2}}^t d\beta \int_{R^1} (\partial_{x_2} \int_{R^1} Z_0(t,x;\tau,\gamma;\gamma(t,\beta))d\gamma_2)\Phi(\beta,\gamma_1;x(t,\beta);\tau,\xi)d\gamma_1. \tag{36}$$

При доказательстве последней формулы используем, что

$$|\partial_{x_2}Z_0(t,x;\tau,\xi,y_2 - y_1(t-\tau)) - \partial_{x_2}Z_0(t,x;\tau,\xi,y_2' - y_1(t-\tau))| \le$$

$$C|y_2 - y_2'|^{\alpha_2}(t-\tau)^{-7/2}\exp\{-c\rho\},$$

$$\int\limits_{R^1} \partial_{x_2} Z_0(t,x;\beta,\gamma;y(t,\beta))|_{y_2=x_2-x_1(t-\beta)} d\gamma_2 = 0,$$

$$\partial_{x_2} \int\limits_{R^1} Z_0(t,x;\beta,\gamma;y(t,\beta)) d\gamma_2 = \int\limits_{R^1} [\partial_{x_2} Z_0(t,x;\beta,\gamma;y(t,\beta)) -$$

$$\partial_{x_2} Z_0(t,x;\beta,\gamma;y(t,\beta))|_{y_2=x_2-x_1(t-\beta)}] d\gamma_2.$$

Из оценок матрицы Грина $Z_0(t,x;\tau,\xi;\xi(t,\beta))$ и формул (35), (36) получим оценки для $\partial_{x_2} V$, $\partial_{x_1}^k V$, $0 \le k \le 2$, которые показывают, что главной частью матрицы $\mathcal{E}(t,x;\tau,\xi)$ по порядку особенности является $Z_0(t,x;\tau,\xi;\xi(t,\beta))$.

Отметим, что аналогично можно построить ф.м.р. сопряженной системы к (1) [3, с. 91]. Используя формулу Грина-Остроградского, получим ряд свойств ф.м.р. системы (1), в частности, формулу свертки и свойство нормальности.

Список литературы

1. Малицька Г.П. *Системи рівнянь типу Колмогорова* // Укр. мат. журн.–2009.– Т.12, №3.–С.1650–1563.
2. Малицька Г.П. *Про системи рівнянь типу Колмогорова з коефіцієнтами, залежними від часової змінної* // Деп. в ДНТБ України. – 2007. – №102, 0.9 др. арк. РЖДНР 2007, №1–2.
3. Эйдельман С.Д. Параболические системы. – М.: Наука, 1964.– 443с.

Прикарпатский национальный университет им. В. Стефаника,
Ивано-Франковск, Украина

Поступило 26.10.2010

Malytska H.P., Burtnyak I.V. *Method of parametris for the ultraparabolic systems*, Carpathian Mathematical Publications, **2**, 2 (2010), 74–82.

We consider systems of ultraparabolic equations which generated equation of diffusion with inertia. Using the modified method Levy, we constructed the fundamental matrix of solutions of this system of Kolmogorov equations of second order, and got estimations of derivatives, included in the system.

Малицька Г.П., Буртняк І.В. *Метод параметриксу для ультрапараболічних систем* // Карпатські математичні публікації. — 2010. — Т.2, №2. — С. 74–82.

Тут розглянуто системи ультрапараболічних рівнянь, які узагальнюють рівняння дифузії з інерцією. Використовуючи модифікований метод Леві, ми побудували фундаментальну матрицю розв'язків системи рівнянь Колмогорова другого порядку, одержано оцінки похідних, що входять в систему.

Карпатські математичні публікації. Т.2, №2

Carpathian Mathematical Publications. V.2, №2

УДК 515.12+512.58

Nykyforchyn O.R.

ATOMIZED MEASURES AND SEMICONVEX COMPACTA

Nykyforchyn O.R. *Atomized measures and semiconvex compacta*, Carpathian Mathematical Publications, **2**, 2 (2010), 83–100.

A class of atomized measures on compacta, which are generalizations of regular real-valued measures, is introduced. It has also been shown that the space of normalized (weakly) atomized measures on a compactum is a free object over this compactum in the category of (strongly) semiconvex compacta.

Introduction

It has been known for a long that the space PX of probability measures on a compact Hausdorff space X with the weak* topology is a *convex compactum*, i.e. it can be embedded into a locally convex topological vector space as a compact convex set. Moreover, it is a *free convex compactum* [3] *over* X, i.e. it contains X as a closed subspace so that each continuous mapping from X to a convex compactum K can be uniquely extended to an *affine* continuous mapping from PX to K.

Some applications require the class of convex compacta to be extended to the class of so-called *semiconvex compacta* [8]. The goal of this work is to show that free semiconvex compacta can also be obtained as spaces of special measures, which we call *atomized*.

We use the following terminology and denotations : $I = [0,1]$ is *a unit segment*, $\mathbb{R}_+ = [0;+\infty)$, $\mathbb{R}^+ = (0;+\infty)$, $\mathbb{Q}^+ = \mathbb{Q} \cap (0;+\infty)$. A *compactum* is a (not necessarily metrizable) (bi)compact Hausdorff topological space.

For basic definitions and facts of the category theory cf. [7]. The *category of Tychonoff spaces* $\mathcal{T}\mathrm{ych}$ and the *category of compacta* $\mathcal{C}\mathrm{omp}$ consist of all Tychonoff spaces and all compact Hausdorff spaces, respectively, and their continuous maps.

2000 *Mathematics Subject Classification:* 18B30, 54B30.
Key words and phrases: Semiconvex compactum, measure, atom, monad.
Partially suported by the grant 25.1/099 of State Fund of Fundamental Research of Ukraine, and by Intergovernmental Programme of Scientific and Technological Cooperation, project M/95-2009.

1 Atomized measures

In the sequel X is a compactum, $\operatorname{Exp} X$ is the collection of all closed subsets of X, and $\exp X = \operatorname{Exp} X \setminus \{\varnothing\}$. Each regular real-valued additive measure on X is uniquely determined by its values on closed subsets of X, hence the following is equivalent to the usual definition:

Definition. *A function* $m : \operatorname{Exp} X \to \mathbb{R}$ *is a* regular additive measure *on* X *if, for all* $A, B \in \operatorname{Exp} X$:

(1) $m(\varnothing) = 0$;

(2) $A \subset B$ *implies* $m(A) \leqslant m(B)$ (monotonicity);

(3) $m(A \cup B) + m(A \cap B) = m(A) + m(B)$ *(a property which is equivalent to* additivity*)*;

(4) for each filtered subcollection $\mathcal{A} \subset \operatorname{Exp} X$*, the equality* $m(\bigcap \mathcal{A}) = \inf_{A \in \mathcal{A}} m(A)$ (τ-smoothness, *which is equivalent to outer regularity) is valid.*

Obviously (1), (2) imply $m(\operatorname{Exp} X) \subset \mathbb{R}_+$. From now on all measures are considered regular. For a closed subset $X_0 \subset X$ and a measure m on X, the restriction of m to $\operatorname{Exp} X_0$ is a measure as well, and it is denoted by $m|_{X_0}$ for brevity.

We denote $|m| = m(X)$. If $|m| = 1$ ($|m| \leqslant 1$), then the measure m is *normalized* or a *probability measure* (resp. a *subnormalized measure*). We denote by $\overline{P}X$ the set of all measures on X, and PX and $\underline{P}X$ are its subsets that consist of all normalized and all subnormalized measures respectively. The three sets $PX \subset \underline{P}X \subset \overline{P}X$ are considered with the weak* topologies [3]. Recall that PX and $\underline{P}X$ are compacta, and $\overline{P}X$ is not compact, but it is a Tychonoff space.

For each continuous mapping of compacta $f : X \to Y$ and a measure m on X, the set function $m' : \operatorname{Exp} Y \to \mathbb{R}$, $m'(B) = m(f^{-1}(B))$, for all $B \underset{\mathrm{cl}}{\subset} Y$, is a measure on Y as well. We denote m' by $\overline{P}f(m)$ and obtain a mapping $\overline{P}f : \overline{P}X \to \overline{P}Y$, which is continuous. Thus a functor [7] $\overline{P} : \mathcal{C}omp \to \mathcal{T}ych$ is obtained. Since m' is normalized (subnormalized) whenever m belongs to the respective class, we have subfunctors $P : \mathcal{C}omp \to \mathcal{C}omp$, $\underline{P} : \mathcal{C}omp \to \mathcal{C}omp$ of $\overline{P}$. The functor P is the famous *probability measure functor* [3].

A measure m on a compactum X is *purely atomic* if there is a finite or countable sequence $(x_i, p_i)_{i \in \mathcal{I}}$ in $X \times (0, +\infty)$ such that, for each $A \in \operatorname{Exp} X$, $m(A)$ is equal to $\sum\{p_i \mid i \in \mathcal{I}, x_i \in A\}$. This implies that $\sum_{i \in \mathcal{I}} p_i$ is finite, and it is equal to 1 (is not greater that 1) if and only if m is normalized (resp. subnormalized). The points x_i are called *atoms* of the measure m, and p_i are their *masses*. Recall that the *Dirac measure* δ_x concentrated in $x \in X$ is the set function

$$\delta_x(A) = \begin{cases} 1, x \in A, \\ 0, x \notin A, \end{cases} \qquad A \in \operatorname{Exp} X.$$

Then we can write $m = \sum_{i \in \mathcal{I}} p_i \delta_{x_i}$. The latter definitions of atoms and purely atomic measures differ from the usual ones for arbitrary measure spaces, but agree with them for regular measures on compacta.

Now assume that we want to count all atoms of a purely atomic measure m separately, i.e. the measure of a closed set $A \subset X$ is a finite or countable *list* (determined up to permutation) of the masses of all atoms that are in A. We even allow for a finite or countable set of atoms to coexist in one point, provided the sum of their masses is finite, i.e. atoms of m can be split. The obtained set function is called a *purely atomized* measure.

The subsets of all purely atomic measures are not closed in either of the three spaces PX, $\underline{P}X$, $\overline{P}X$, if X is infinite. Moreover, it is easy to show that they are dense. Therefore in this case natural attempts to determine a compact Hausdorff topology on the sets of all normalized or subnormalized purely atomized measures fail. These sets are to be enriched by "missing" limits of nets. A simpler approach is to assume that our measure can have a purely atomized part and a non-atomized part which is an ordinary regular measure on X. The latter one can have its own atoms, but they are not counted separately, just go into a "common sum". Thus we obtain what we call a *weakly atomized measure*. Another (more complicated) way is to consider non-atomized part in more detail (to say, "atomize" it a little as well), and it leads to *atomized measures*.

To properly define our measures, we first define sets, which will be their codomains. Let us start with measures with finite numbers of atoms. We denote by $\overline{\mathcal{S}}$ the quotient set of the disjoint union $\bigcup_{n=0}^{\infty}(0, +\infty)^n$ w.r.t. the equivalence relation that identifies finite sequences of positive numbers if they coincide up to permutation. The equivalence class of $(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n)$ is denoted by $[\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n]$, and $|[\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n]| = \lambda_1 + \lambda_2 + \cdots + \lambda_n$. Observe that $\overline{\mathcal{S}}$ is an Abelian monoid with a unit $[1]$, if a multiplication is defined as follows:

$$[\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_m] \cdot [\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_n] = [\lambda_1\mu_1, \lambda_1\mu_2, \ldots, \lambda_m\mu_n]$$

(all mn pairwise products at the right side). Since $|\lambda \cdot \mu| = |\lambda| \cdot |\mu|$ for all $\lambda, \mu \in \overline{\mathcal{S}}$, the sets

$$\mathcal{S} = \{\lambda \in \overline{\mathcal{S}} \mid |\lambda| = 1\} \text{ and } \underline{\mathcal{S}} = \{\lambda \in \overline{\mathcal{S}} \mid |\lambda| \leqslant 1\}$$

are submonoids of $\overline{\mathcal{S}}$.

We also define an addition on $\overline{\mathcal{S}}$ by the formula:

$$[\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_m] + [\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_n] = [\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_m, \mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_n],$$

making it an Abelian monoid with a unit $[\,]$ (the equivalence class of the empty sequence). Since "$\cdot$" distributes over "$+$", $(\overline{\mathcal{S}}, +, \cdot)$ is an Abelian semiring [5].

Three partial orders naturally arise on $\overline{\mathcal{S}}$ (and hence on $\mathcal{S}$ and $\underline{\mathcal{S}}$):

(1) for $\lambda, \mu \in \overline{\mathcal{S}}$, $\lambda \leqslant \mu$ if $\lambda = [\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_m]$, $\mu = [\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_m, \mu_{m+1}, \ldots, \mu_n]$, $m \leqslant n$;

(2) for $\lambda, \mu \in \overline{\mathcal{S}}$, $\lambda | \mu$ (λ *divides* μ) if $\mu = \lambda \cdot \nu$ for some $\nu \in \overline{\mathcal{S}}$;

(3) for $\lambda, \mu \in \overline{\mathcal{S}}$, $\lambda \prec \mu$ (μ is a *refinement* of λ) if $\lambda = [\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_m]$, $\mu = [\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_n]$, $m \leqslant n$, and there is a surjection $\sigma : \{1, 2, \ldots, n\} \to \{1, 2, \ldots, m\}$ such that $\lambda_i = \sum_{\sigma(j)=i} \mu_j$ for all $1 \leqslant i \leqslant m$.

Observe that $(\overline{\mathcal{S}}, \leqslant)$ is a lattice and a complete lower semilattice, and a function $m : \operatorname{Exp} X \to \overline{\mathcal{S}}$ such that:

(1) $m(\varnothing) = [\,]$;

(2) $A \subset B$ implies $m(A) \leqslant m(B)$;

(3) $m(A \cup B) + m(A \cap B) = m(A) + m(B)$;

(4) $m(\bigcap \mathcal{A}) = \inf_{A \in \mathcal{A}} m(A)$ for each filtered subcollection $\mathcal{A} \subset \operatorname{Exp} X$;

is precisely a purely atomized measure with a finite number of atoms. We call m normalized (subnormalized) if $|m(X)| = 1$ ($|m(X)| \leqslant 1$ respectively).

We denote by $\overline{\mathcal{S}}^a$ the set of all measures on I such that their restrictions to $[c, 1]$ are purely atomic for all $0 < c \leqslant 1$, and the masses of each such c are multiples of c (probably are equal to 0). It is an easy exercise to show that $\overline{\mathcal{S}}^a$ is closed in $\overline{P}I$. Let elements $\bar\lambda, \bar\mu$ of $\overline{P}I$ be multiplied as follows: $\bar\lambda \cdot \bar\mu = \overline{P}(\cdot)(\bar\lambda \otimes \bar\mu)$, where $\bar\lambda \otimes \bar\mu \in \overline{P}(I \times I)$ is the product measure [11], and $\cdot : I \times I \to I$ is the multiplication of reals. Then $\overline{P}I$ is an Abelian Tychonoff topological monoid, PI and $\underline{P}I$ are its compact Hausdorff submonoids [11]. Assume $\bar\lambda, \bar\mu \in \overline{\mathcal{S}}^a$, then

$$\bar\lambda = \sum_{i \in \mathcal{I}} \lambda_i \delta_{\lambda_i} + \alpha\delta_0, \quad \lambda_i > 0 \text{ for all } i \in \mathcal{I}, \quad \sum_{i \in \mathcal{I}} \lambda_i < \infty,$$

$$\text{and} \qquad \bar\mu = \sum_{j \in \mathcal{J}} \mu_j \delta_{\mu_j} + \beta\delta_0, \quad \mu_j > 0 \text{ for all } j \in \mathcal{J}, \quad \sum_{j \in \mathcal{J}} \mu_j < \infty.$$

It is straightforward to verify that

$$\bar\lambda \cdot \bar\mu = \sum_{i \in \mathcal{I}, j \in \mathcal{J}} \lambda_i \mu_j \delta_{\lambda_i \mu_j} + (\alpha\beta + \sum_{i \in \mathcal{I}} \lambda_i \cdot \beta + \alpha \cdot \sum_{j \in \mathcal{J}} \mu_j)\delta_0 \in \overline{\mathcal{S}}^a,$$

therefore $\overline{\mathcal{S}}^a \subset \overline{P}I$ is a closed submonoid.

The intersections

$$\mathcal{S}^a = \overline{\mathcal{S}}^a \cap PI = \{\bar\lambda \in \overline{\mathcal{S}}^a \mid |\bar\lambda| = 1\} \text{ and } \underline{\mathcal{S}}^a = \overline{\mathcal{S}}^a \cap \underline{P}I = \{\bar\lambda \in \overline{\mathcal{S}}^a \mid |\bar\lambda| \leqslant 1\}$$

are compact Hausdorff topological monoids.

It is easy to see that $\overline{\mathcal{S}}^a$ is closed under the "argumentwise" addition of measures, thus $(\overline{\mathcal{S}}^a, +, \cdot)$ is an Abelian Tychonoff topological semiring. It is also a lattice and a complete lower semilattice w.r.t. obvious comparison.

For all $\lambda = [\lambda_1, \ldots, \lambda_m] \in \overline{\mathcal{S}}$, the measure $i^a(\lambda) = \sum_{i=1}^m \lambda_i \delta_{\lambda_i}$ is in $\overline{\mathcal{S}}^a$, and the mapping $i^a : \overline{\mathcal{S}} \to \overline{\mathcal{S}}^a$ preserves multiplication, zero and unit, $|\ldots|$, pairwise suprema and arbitrary infima. It restrictions provide similar embeddings $\mathcal{S} \to \mathcal{S}^a$ and $\underline{\mathcal{S}} \to \underline{\mathcal{S}}^a$. Thus we consider $\overline{\mathcal{S}}$, $\underline{\mathcal{S}}$, and $\mathcal{S}$ as submonoids of $\overline{\mathcal{S}}^a$, $\underline{\mathcal{S}}^a$, and $\mathcal{S}^a$ respectively.

Thus we arrive at a required

Definition. *A function $m : \operatorname{Exp} X \to \overline{\mathcal{S}}^a$ such that:*

(1) $m(\varnothing) = 0$;

(2) $A \subset B$ implies $m(A) \leqslant m(B)$;

(3) $m(A \cup B) + m(A \cap B) = m(A) + m(B)$;

(4) $m(\bigcap \mathcal{A}) = \inf_{A \in \mathcal{A}} m(A)$ for each filtered subcollection $\mathcal{A} \subset \operatorname{Exp} X$;

is called a weakly atomized measure. *If $m(X)(0) = 0$ (hence $m(A)(0) = 0$ for all $A \in \operatorname{Exp} X$), then we call m* purely atomized. *A function m is* normalized *(*subnormalized*) if $|m(X)| = 1$ ($|m(X)| \leqslant 1$ respectively). The correspondence $m_n : A \mapsto m(A)(0)$ is called the* non-atomized part *of m, and $m_a : A \mapsto m(A) - m_n(A)\delta_0$ is the* purely atomized part *of m.*

Such m is of the following form: there is a real-valued measure m_0 on X and a finite or countable sequence $(x_i, p_i)_{i \in \mathcal{I}}$ in $X \times \mathbb{R}^+$ such that, for each $A \in \operatorname{Exp} X$, $m(A)$ is equal to $\sum\{p_i\delta_{p_i} \mid i \in \mathcal{I}, x_i \in A\} + m_0(A)\delta_0$. Then m_a send each A to $\sum\{p_i\delta_{p_i} \mid i \in \mathcal{I}, x_i \in A\}$ (and is purely atomized indeed), and $m_n = m_0$, hence the non-atomized part is a regular real-valued measure.

We identify such a weakly atomized measure $m : \operatorname{Exp} X \to \overline{\mathcal{S}}^a$ with the following real-valued measure $\hat m \in P(X \times I)$:

$$\hat m(B) = \sum\{p_i \mid i \in \mathcal{I}, (x_i, p_i) \in B\} + m_0(\mathrm{pr}_1(B \cap (X \times \{0\}))), \quad B \in \operatorname{Exp}(X \times I).$$

It is a unique real-valued measure $m' \in P(X \times I)$ such that $m'(A \times F) = m(A)(F)$ for all $A \in \operatorname{Exp} X$, $F \in \operatorname{Exp} I$. The set $\overline{P}^a X$ of measures $\hat m$ for all weakly atomized measures m on X consists of all real-valued measures on $X \times I$ which are purely atomic outside of $X \times \{0\}$, and masses in all $(x, p) \in X \times (0; 1]$ are multiples of p. The subset $\overline{P}^a X \subset \overline{P}(X \times I)$ is closed, as well as the analogous subsets $\underline{P}^a X \subset \underline{P}(X \times I)$ and $P^a X \subset P(X \times I)$ that correspond to subnormalized and normalized atomized measures.

By observing that, for each continuous mapping of compacta $f : X \to Y$, the inclusions $\overline{P}(f \times \mathbf{1}_I)(\overline{P}^a X) \subset \overline{P}^a Y$, $\underline{P}(f \times \mathbf{1}_I)(\underline{P}^a X) \subset \underline{P}^a Y$, and $P(f \times \mathbf{1}_I)(P^a X) \subset P^a Y$ are valid, we obtain subfunctors $\overline{P}^a : \mathcal{C}omp \to \mathcal{T}ych$, $\underline{P}^a : \mathcal{C}omp \to \mathcal{C}omp$, and $P^a : \mathcal{C}omp \to \mathcal{C}omp$, of the functors $\overline{P}(- \times I) : \mathcal{C}omp \to \mathcal{T}ych$, $\underline{P}(- \times I) : \mathcal{C}omp \to \mathcal{C}omp$, and $P(- \times I) : \mathcal{C}omp \to \mathcal{C}omp$. We call them the *functor of weakly atomized measures*, the *functor of subnormalized weakly atomized measures*, and the *functor of normalized weakly atomized measures*, respectively.

To proceed, we recall that the *Bohr compactification* [6] of the multiplicative group of positive reals is a compact Hausdorff Abelian topological group $(\mathit{bohr}\,\mathbb{R}^+, \cdot)$, together with a continuous homomorphism $b_{\mathbb{R}^+} : \mathbb{R}^+ \to \mathit{bohr}\,\mathbb{R}^+$, such that, for each continuous homomorphism $f : \mathbb{R}^+ \to G$ into a compact Hausdorff Abelian topological group, there is a unique continuous homomorphism $\mathit{bohr}\, f : \mathit{bohr}\,\mathbb{R}^+ \to G$ such that $\mathit{bohr}\, f \circ b_{\mathbb{R}^+} = f$. The image $b_{\mathbb{R}^+}(\mathbb{R}^+)$ is dense in $\mathit{bohr}\,\mathbb{R}^+$. Moreover, it is not difficult to prove the following:

Lemma 1.1. *For all $g \in \mathit{bohr}\,\mathbb{R}^+$, there is a net (n_β) in $\mathbb{N}$ such that $(n_\beta) \to +\infty$, $b_{\mathbb{R}^+}(n_\beta) \to g$.*

By I^b we denote the subset

$$\{(t, b_{\mathbb{R}^+}(t)) \mid t \in (0; 1]\} \cup (\{0\} \times \mathit{bohr}\,\mathbb{R}^+)$$

of the compact Hausdorff Abelian monoid $I \times \mathit{bohr}\,\mathbb{R}^+$. Obviously I^b is closed, hence is a compact Hausdorff Abelian monoid as well. Similarly to the above, we make $\overline{P}(I^b)$ a Tychonoff Abelian monoid by putting

$$\bar\lambda \cdot \bar\mu = \overline{P}(\cdot)(\bar\lambda \otimes \bar\mu), \text{ for } \bar\lambda, \bar\mu \in \overline{P}(I^b).$$

Let $\overline{\mathcal{S}}^b$ be the set of all real-valued measures on I^b that are purely atomic outside of $\{0\} \times \mathit{bohr}\,\mathbb{R}^+$, and masses of all (t, g), $t \in (0; 1]$, are multiples of t. Then $\overline{\mathcal{S}}^b \subset \overline{P}(I^b)$ is a closed submonoid, and the intersections $\underline{\mathcal{S}}^b = \overline{\mathcal{S}}^b \cap \underline{P}(I^b)$, $\mathcal{S}^b = \overline{\mathcal{S}}^b \cap P(I^b)$ are compact Hausdorff Abelian monoids. An embedding $i^b : \overline{\mathcal{S}} \to \overline{\mathcal{S}}^b$ is determined by the formula: for all $\lambda = [\lambda_1, \ldots, \lambda_m] \in \overline{\mathcal{S}}$, $i^b(\lambda) = \sum_{i=1}^m \lambda_i \delta_{(\lambda_i, b_{\mathbb{R}^+}(\lambda_i))}$. Its restrictions provide embeddings $\underline{\mathcal{S}} \to \underline{\mathcal{S}}^b$ and $\mathcal{S} \to \mathcal{S}^b$. The restriction p^b_a of $P\,\mathrm{pr}_1 : P(I \times \mathit{bohr}\,\mathbb{R}^+) \to PI$ to $\overline{\mathcal{S}}^b$ is a surjective homomorphism onto $\overline{\mathcal{S}}^a$, and its restrictions map $\underline{\mathcal{S}}^b$ onto $\underline{\mathcal{S}}^a$ and $\mathcal{S}^b$ onto $\mathcal{S}^a$.

Lemma 1.2. *The set $\mathcal{S}$ is dense both in $\mathcal{S}^a$ and $\mathcal{S}^b$.*

Proof is straightforward.

Since $\overline{\mathcal{S}}^b$ is an Abelian semiring, a lattice and a complete lower semilattice, we use it the same way as $\overline{\mathcal{S}}^a$ and suggest:

Definition. *A function $m : \operatorname{Exp} X \to \overline{\mathcal{S}}^b$ such that:*

(1) $m(\varnothing) = 0$;

(2) $A \subset B$ implies $m(A) \leqslant m(B)$;

(3) $m(A \cup B) + m(A \cap B) = m(A) + m(B)$;

(4) $m(\bigcap \mathcal{A}) = \inf_{A \in \mathcal{A}} m(A)$ for each filtered subcollection $\mathcal{A} \subset \operatorname{Exp} X$;

is called an atomized measure. *If $m(X)(\{0\} \times bohr\, \mathbb{R}^+) = 0$ (hence $m(A)(\{0\} \times bohr\, \mathbb{R}^+) = 0$ for all $A \in \operatorname{Exp} X$), then we call m* purely atomized. *A function m is* normalized *(*subnormalized*) if $|m(X)| = 1$ ($|m(X)| \leqslant 1$ respectively). The correspondence $m_n : A \mapsto m(A)|_{(\{0\} \times bohr\, \mathbb{R}^+)}$ is called the* non-atomized part *of m, and $m_a = m - m_n$ is the* purely atomized part *of m.*

Note that the non-atomized part m_n is not a real-valued measure, but a measure with values in the space of real-valued measures on a compact Hausdorff *group*, namely on $\{0\} \times bohr\, \mathbb{R}^+$.

We identify again each atomized measure m on a compactum X with a unique real-valued measure $\hat{m}$ on $X \times I^b$ such that $\hat{m}(A \times F) = m(A)(F)$ for all $A \in \operatorname{Exp} X$, $F \in \operatorname{Exp} I^b$. The set $\overline{P}^b X$ of all such $\hat{m}$ consists of all measures on $X \times I^b \subset X \times I \times bohr\, \mathbb{R}^+$ that are purely atomic outside of $X \times \{0\} \times bohr\, \mathbb{R}^+$, and masses of all (x, t, g), $t > 0$, are multiples of t. The compact Hausdorff subspaces $\underline{P}^b X$ of all subnormalized atomized measures and $P^b X$ of all normalized atomized measures, as well as the *functors* $\overline{P}^b : \mathsf{Comp} \to \mathsf{Tych}$ *of atomized measures*, $\underline{P}^b : \mathsf{Comp} \to \mathsf{Comp}$ *of subnormalized atomized measures*, and $P^b : \mathsf{Comp} \to \mathsf{Comp}$ *of normalized atomized measures* are defined obviously.

Reasons to introduce such a complicated notion of atomized measure (comparing to the definition of weakly atomized measure) will be clarified in the next sections.

2 SEMICONVEX COMPACTA

First recall some definitions and facts from [8].

Let X be a *convex compactum* (i.e. a convex compact set in a locally convex topological vector space) and $c(x, y, \lambda) = \lambda x + (1-\lambda) y$, for all $x, y \in X$, $\lambda \in I$, i.e. c is a pairwise convex combination. For the sake of brevity we will write $\lambda(x, y)$ instead of $c(x, y, \lambda)$. The ternary operation $c : X \times X \times I \to X$ satisfies the following properties:

(1) for all $x, y \in X$, $\lambda \in I$: $\lambda(x, y) = (1-\lambda)(y, x)$ (*commutative law*);

(2) for all $x, y, z \in X$, $\lambda, \mu, \nu \in I$, $\lambda + \mu + \nu = 1$, $\mu \neq 0$:

$$\lambda(x, \frac{\mu}{\mu + \lambda}(y, z)) = (\lambda + \mu)(\frac{\lambda}{\lambda + \mu}(x, y), z)$$

(*associative law*);

(3) for all $x, y \in X$: $1(x, y) = x$;

(4) each neighborhood U of the diagonal $\Delta_X = \{(x, x) \mid x \in X\}$ in $X \times X$ contains a neighborhood B of Δ_X such that $(x, y), (z, t) \in B$, $\lambda \in I$ implies $(\lambda(x, z), \lambda(y, t)) \in B$;

(5) $\lambda(x, x) = x$ for all $x \in X$ and $\lambda \in I$ (*absence of loops*).

In the presence of (1)–(3), the property (4) provides *local convexity* and is equivalent to the following :

(4') the topology on X is generated by a family of pseudometrics $(d_\alpha)_{\alpha \in \mathcal{A}}$ such that $x, y, z, t \in X$, $\varepsilon > 0, \alpha \in \mathcal{A}$, $d_\alpha(x, y) < \varepsilon$, $d_\alpha(z, t) < \varepsilon$, $\lambda \in I$ implies $d_\alpha(\lambda(x, z), \lambda(y, t)) < \varepsilon$.

Remark. *If pseudometrics d_α, d_β satisfy (4)', then the expression $\max\{d_\alpha(x, y), d_\beta(x, y)\}$ is also a pseudometric, which satisfies (4'). Therefore we can assume that the family $(d_\alpha)_{\alpha \in \mathcal{A}}$ is directed and even saturated [2].*

Results of Świrszcz [10] imply that any compactum X with an operation c that satisfies (1)–(5) can be embedded as a convex compact set into a locally convex topological vector space so that c is a pairwise convex combination. In particular, the hyperspace $\operatorname{cc} K$, of all non-empty convex closed subsets of a convex compactum K with the Vietoris topology [11], with the operation c defined as $c(A, B, \lambda) = \{\lambda a + (1-\lambda) b \mid a \in A, b \in B\}$, for all $A, B \in \operatorname{cc} K$, $\lambda \in I$, satisfies (1)–(5) and is a convex compactum as well.

Unfortunately, if we use the latter formula to define combinations of elements of the hyperspace $\exp K$ of *all* closed non-empty subsets of a convex compactum K, only properties (1)–(4), but not (5), are valid, hence $\exp K$ does not become a convex compactum this way. There are a lot of similar examples, involving, e.g., convolutions of measures, such that (5) fails. Therefore we will relax the requirements to cover such structures.

A semiconvex compactum is a compactum X with a continuous ternary operation c : $X \times X \times I \to X$ (we usually call it *semiconvex combination* and write $\lambda(x, y)$ instead of $c(x, y, \lambda)$) such that (1)–(4) are valid. In the sequel we assume that a family of pseudometrics $(d_\alpha)_{\alpha \in \mathcal{A}}$ on X, whose existence is assured by (4'), is fixed and saturated for each particular X.

Extend the notion of semiconvex combination onto finite number of elements of X. Let $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \geqslant 0$, $\lambda_1 + \cdots + \lambda_n = 1$ and $x_1, \ldots, x_n \in X$, then

$$(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)(x_1, \ldots, x_n) = \begin{cases} x_1, & \text{if } \lambda_1 = 1; \\ \lambda_1(x_1, (\frac{\lambda_2}{1-\lambda_1}, \ldots, \frac{\lambda_n}{1-\lambda_1})(x_2, \ldots, x_n)), & \text{if } \lambda_1 \neq 1. \end{cases}$$

If *arguments* $x_1, \ldots, x_n$ of semiconvex combination are permutted simultaneously with the respective *coefficients* $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$, the value of semiconvex combination does not change. We can also drop arguments that correspond to zero coefficients. We call a subset of X *semiconvex* if it is closed under semiconvex combinations.

By continuity semiconvex combinations are naturally defined also for *countable* numbers of elements. Let $x_i \in X$, $\lambda_i \in I$, $i = 1, 2, \ldots$, be such that $\sum_{i=1}^{\infty} \lambda_i = 1$. Then the sequence $(\lambda_1, \ldots, \lambda_{n-1}, 1 - \lambda_1 - \cdots - \lambda_{n-1})(x_1, \ldots, x_n)$, $n \in \mathbb{N}$, has a limit, which we regard as the value of $(\lambda_1, \lambda_2, \ldots)(x_1, x_2, \ldots)$. This value is continuous w.r.t. $(x_1, x_2, \ldots) \in X^{\mathbb{N}}$ for a fixed $(\lambda_1, \lambda_2, \ldots)$.

The constructed in the previous section monoid $\mathcal{S}$ naturally acts on X:

$$[\lambda_1,\dots,\lambda_n]x = (\lambda_1,\dots,\lambda_n)(x,\dots,x), \quad x\in X, [\lambda_1,\dots,\lambda_n]\in\mathcal{S},$$

and all correspondences $x\mapsto sx$, for $s\in\mathcal{S}$, are non-expanding w.r.t. all pseudometrics d_α.

For $A\in\exp X$ and $s=[\lambda_1,\dots,\lambda_n]\in\mathcal{S}$, we write $sA=\{sx\mid x\in A\}$ and $s*A=\{(\lambda_1,\dots,\lambda_n)(x_1,\dots,x_n)\mid x_1,\dots,x_n\in A\}$, and obtain two actions of $\mathcal{S}$ on $\exp X$. If A is semiconvex, then so are sA and $s*A$.

For any subset $A\subset X$ the set

$$\mathcal{S}A=\{s*A\mid s\in\mathcal{S}\}=\{(\lambda_1,\dots,\lambda_n)(x_1,\dots,x_n)\mid x_1,\dots,x_n\in A,\\ n\in\mathbb{N},\lambda_1,\dots,\lambda_n\in I,\lambda_1+\dots+\lambda_n=1\}$$

is a least semiconvex subset in X that contains A. It is called the *semiconvex hull* of A. Its closure is a least *closed* semiconvex subset in X that contains A, and therefore is called the *closed semiconvex hull* of A. In particular, $\mathrm{Cl}(\mathcal{S}\{a\})$ is a least closed semiconvex set that contains $a\in X$.

A mapping $f:X\to Y$ between semiconvex compacta is called *affine* if it preserves semiconvex combinations, i.e. $f(\lambda(x_1,x_2))=\lambda(f(x_1),f(x_2))$ whenever $x_1,x_2\in X$, $\lambda\in I$.

For the reader's convenience, until the end of this section we reproduce several statements from [8], in particular because of changes in notation.

Lemma 2.1. *Let $a\in X$, $A=\mathrm{Cl}(\mathcal{S}\{a\})$, then $\bigcap\limits_{s\in\mathcal{S}}sA$ is a unique minimal w.r.t. inclusion closed semiconvex subset $B\subset A$.*

Proof. By Zorn Lemma such a minimal subset B exists. Since, for any $s\in\mathcal{S}$, the set $sB\subset B$ is also closed and semiconvex, we obtain $sB=B$. Then $B\subset A$, $B=sB\subset sA$ implies $B\subset\bigcap\limits_{s\in\mathcal{S}}sA=A_0$, and the latter set is closed, semiconvex, and satisfies $A_0=sA_0$ for all $s\in\mathcal{S}$.

Let $x\in A_0$, $\varepsilon>0$, $\alpha\in\mathcal{A}$, $b\in B$. Since $B\subset\mathrm{Cl}(\mathcal{S}\{a\})$, there is $s'\in\mathcal{S}$ such that $d_\alpha(b,s'a)\leqslant\varepsilon/2$. Choose $y\in A_0$ such that $x=s'y$. There is $s''\in\mathcal{S}$ such that $d_\alpha(y,s''a)\leqslant\varepsilon/2$. By non-expansion, obtain $d_\alpha(x,s's''a)=d_\alpha(s'y,s's''a)\leqslant\varepsilon/2$, $d_\alpha(s''b,s's''a)\leqslant\varepsilon/2$. Then $d_\alpha(x,s''b)\leqslant\varepsilon/2+\varepsilon/2=\varepsilon$, $s''b\in B$, therefore $d_\alpha(x,B)\leqslant\varepsilon$, which implies $x\in B$. Thus $B=\bigcap\limits_{s\in\mathcal{S}}sA$. □

Due to the above lemma, for all $s\in\mathcal{S}$, the correspondence $B\to B$ that takes each b to sb is a non-expanding surjection w.r.t. all pseudometrics d_α, $\alpha\in\mathcal{A}$. Since any non-expanding surjection of a metric compactum onto itself is an isometry, for all $a,b\in X$, $s\in\mathcal{S}$, $\alpha\in\mathcal{A}$, we have $d_\alpha(sa,sb)=d_\alpha(a,b)$.

Lemma 2.2. *The set $B=\bigcap\limits_{s\in\mathcal{S}}sA$ consists of a single point.*

Proof. Putting $\lambda((x,y),(z,t))=(\lambda(x,z),\lambda(y,t))$, for all $(x,y),(z,t)\in B\times B$, $\lambda\in I$, we turn $B\times B$ into a semiconvex compactum. For $x,y\in B$, let $(x\to y)=\mathrm{Cl}(\mathcal{S}\{(x,y)\})\subset B\times B$. Since $\mathcal{S}\{x\}$ and $\mathcal{S}\{y\}$ are dense in the compactum B, $\mathrm{pr}_1((x\to y))=\mathrm{pr}_2((x\to y))=B$.

Let $(z_1,t_1),(z_2,t_2)\in\mathcal{S}\{(x,y)\}$, i.e. $z_1=s_1x$, $t_1=s_1y$, $z_2=s_2x$, $t_2=s_2y$ for some $s_1,s_2\in\mathcal{S}$. For all $\varepsilon>0$, $\alpha\in\mathcal{A}$ there is $s\in\mathcal{S}$ such that $d_\alpha(sx,y)<\varepsilon$. Then

$$d_\alpha(t_1,t_2)=d_\alpha(s_1y,s_2y)\leqslant d_\alpha(s_1y,s_1sx)+d_\alpha(s_1sx,s_2sx)+d_\alpha(s_2sx,s_2y)=\\ d_\alpha(y,sx)+d_\alpha(s_1x,s_2x)+d_\alpha(sx,y)=d_\alpha(z_1,z_2)+2\varepsilon,$$

hence $d_\alpha(t_1,t_2)\leqslant d_\alpha(z_1,z_2)$. The reverse inequality is valid as well, thus $d_\alpha(t_1,t_2)=d_\alpha(z_1,z_2)$ for all elements $(z_1,t_1),(z_2,t_2)$ of $\mathcal{S}\{(x,y)\}$ and therefore of $\mathrm{Cl}(\mathcal{S}\{(x,y)\})=(x\to y)$. It implies that $(x\to y)$ is the graph of a mapping $B\to B$ which is an isometry w.r.t. all d_α, $\alpha\in\mathcal{A}$, and $(y\to x)$ is the graph of an inverse isometry.

Let $(z,t_1)\in(x\to y_1)$, $(z,t_2)\in(x\to y_2)$. There exist a net of the form $(s_\beta x)$, $s_\beta\in\mathcal{S}$, such that $s_\beta x\to z$, then $s_\beta y_1\to t_1$, $s_\beta y_2\to t_2$. Since $d_\alpha(s_\beta y_1,s_\beta y_2)=d_\alpha(y_1,y_2)$, the equality $d_\alpha(y_1,y_2)=d_\alpha(t_1,t_2)$ holds.

Fix an arbitrary point $b\in B$. For all $x,y\in B$, there is a unique $z\in B$ such that $(x\to y)=(b\to z)$. Thus we can properly define an operation on B: for $z_1,z_2\in B$, let $z=z_1\cdot z_2$ be such that $(z_2\to z)=(b\to z_1)$. By the above, this operation is an isometry w.r.t. each d_α in each argument separately, hence is a continuous mapping $B\times B\to B$.

Assume that $z_1=s_1b$, $z_2=s_2b$, then $(b\to z_1)=\{(x,s_1x)\mid x\in B\}$, therefore $z_1\cdot z_2=s_1s_2b=s_2s_1b=z_2\cdot z_1$. Such z_1,z_2 are dense in B, and "$\cdot$" is continuous, hence it is commutative for all arguments. Similarly the associative law in $\mathcal{S}$ implies the associativity of "$\cdot$".

The inverse for $x\in B$ is a unique $y\in B$ such that $(y,b)\in(b\to x)$. Uniqueness of the inverse and the compactness of B imply the continuity of the inversion.

Consequently B is a contractible compact Abelian topological group. It is known [1, 4] that such a group is trivial, i.e. is a singleton. □

The point $b\in B$ is unique in A such that $\lambda(b,b)=b$ for all $\lambda\in I$. Let $bX:X\to X$ be the map taking each $a\in X$ to such a point $b\in\mathrm{Cl}(\mathcal{S}\{a\})$. Then $bX(X)$ is a closed subset of X consisting of all points $b\in X$ such that $\lambda(b,b)=b$ for all $\lambda\in I$. This set is called the *center* of X and denoted $Ctr(X)$.

Theorem 1. *The net $(sx)_{s\in(\mathcal{S},|)}$ is uniformly convergent to $bX(x)$, for $x\in X$. The mapping bX is an affine and non-expanding w.r.t. all d_α, $\alpha\in\mathcal{A}$, retraction of the semiconvex compactum X onto its center $Ctr(X)$.*

Proof. Since X is a compactum and all mappings $s(-):X\to X$ are non-expanding, it is sufficient to prove the pointwise convergence. Let $x\in X$, $A=\mathrm{Cl}(\mathcal{S}\{x\})$. For all $s,s'\in\mathcal{S}$, $s|s'$ we have $s'A\subset sA$. Since $\{bX(x)\}=\bigcap\limits_{s\in\mathcal{S}}sA$, for each neighborhood U of $bX(x)$ there is $s\in\mathcal{S}$ such that $sA\subset U$, hence for all $s'\in\mathcal{S}$ such that $s|s'$ we have $s'x\in s'A\subset U$.

All mappings $s(-):X\to X$ are affine, therefore the same is valid for bX. Obviously $bX(x)=x$ if and only if $x\in Ctr(X)$. □

This implies that (1)–(5) are valid for $Ctr(X)$, and the center is a convex compactum, a largest one of all convex compacta that are (algebraically and topologically) embedded into X.

Let A_i, $i \in \mathcal{I}$, be subsets of a compactum X, $\mathcal{F}$ a filter in the index set $\mathcal{I}$. By $\overline{\lim}$ we denote the upper limit:

$$\overline{\lim_{\mathcal{F}}} A_i = \{x \in X \mid \text{for all neighborhoods } U \ni x \text{ and } F \in \mathcal{F}$$
$$\text{there is } i \in F \text{ such that } A_i \cap U \neq \varnothing\}.$$

It is obvious that $\overline{\lim_{\mathcal{F}}} A_i \subset X$ is closed and nonempty whenever all A_i are nonempty. For all $s = [\lambda_1, \ldots, \lambda_n] \in \mathcal{S}$ we denote $\max s = \max\{\lambda_1, \ldots, \lambda_n\}$.

Lemma 2.3. *For any subset $A \subset X$ the equality $\overline{\lim}_{s \in (\mathcal{S},|)} s * A = \overline{\lim}_{\max s \to 0} s * A$ holds.*

Proof. Let $b \in \overline{\lim}_{s \in (\mathcal{S},|)} s * A$, Ub be a neighborhood of b, and $\varepsilon > 0$. Take an arbitrary $s_0 \in \mathcal{S}$ such that $\max s_0 < \varepsilon$. There is $s \in \mathcal{S}$ such that $s|s_0$, $s * A \cap Ua \neq \varnothing$, hence $\max s < \varepsilon$. Thus $b \in \overline{\lim}_{\max s \to 0} s * A$.

Let $s = [\lambda_1, \ldots, \lambda_m] \in \mathcal{S}$. We can (non-uniquely) visualize s as a partition of the unit segment I into adjacent segments of lengths $\lambda_1, \ldots, \lambda_m$. Their ends form an increasing sequence s': $s'_0 = 0$, $s'_1 = \lambda_1$, $s'_2 = \lambda_1 + \lambda_2$, $\ldots$, $s'_m = \lambda_1 + \cdots + \lambda_m = 1$. If $t = [\mu_1, \ldots, \mu_n] \in \mathcal{S}$ is such that the respective sequence t', with $t'_0 = 0$, $t'_1 = \mu_1$, $t'_2 = \mu_1 + \mu_2$, $\ldots$, $t'_n = \mu_1 + \cdots + \mu_n = 1$, is a subsequence of s', then $t \prec s$, i.e. s is a refinement of t.

Now let $b \in \overline{\lim}_{\max s \to 0} s * A$, $\varepsilon > 0$, $\alpha \in \mathcal{A}$. Since $c : X \times X \times I \to X$ is a continuous mapping of compacta, there is $\delta > 0$ such that, for all $x, y, z \in X$, $0 \leqslant \lambda < \delta$, the inequality $d_\alpha(\lambda(x,z), \lambda(y,z)) < \varepsilon/2$ holds. Choose arbitrary $s_0 = [\lambda_1, \ldots, \lambda_m] \in \mathcal{S}$. There are $t = [\mu_1, \ldots, \mu_n] \in \mathcal{S}$, $a_1, \ldots, a_n \in A$ such that $\max t < \delta/m$, $d_\alpha(a, b) < \varepsilon/2)$ for $a = (\mu_1, \ldots, \mu_n)(a_1, \ldots, a_n)$. Construct the described above sequences s'_0 and t' for s_0 and t, and let s' be the union of s'_0 and t' in ascending order. Then s' represents $s \in \mathcal{S}$ which is a refinement both of s_0 and of t. Let each segment $[t_{i-1}, t_i]$ of length μ_i is split by elements of s' into $k_i \geqslant 1$ parts of lengths $\mu_i^1, \ldots, \mu_i^{k_i}$. Calculate the point

$$c = (\mu_1^1, \ldots, \mu_1^{k_1}, \ldots, \mu_i^1, \ldots, \mu_i^{k_i}, \ldots, \mu_n^1, \ldots, \mu_1^{k_n})(\underbrace{a_1, \ldots, a_1}_{k_1 \text{ times}}, \ldots, \underbrace{a_i, \ldots, a_i}_{k_i \text{ times}}, \ldots, \underbrace{a_n, \ldots, a_n}_{k_n \text{ times}}).$$

At most m segments were split into $\geqslant 2$ parts, hence the combinations a and c differ (in obvious sense) only in arguments such that the sums of the respective coefficients are less than $m \cdot \delta/m = \delta$. By the choice of δ this implies $d_\alpha(a, c) < \varepsilon/2$, hence $d_\alpha(b, c) \leqslant d_\alpha(b, a) + d_\alpha(a, c) < \varepsilon/2 + \varepsilon/2 = \varepsilon$. Observe that $c \in s * A$, and by $s_0|s$ we obtain $b \in \overline{\lim}_{s \in (\mathcal{S},|)} s * A$. $\square$

It is easy to see that a largest closed subset $A \subset X$, such that $[\lambda_1, \ldots, \lambda_n](-) : A^n \to A$ is surjective for any $[\lambda_1, \ldots, \lambda_n] \in \mathcal{S}$, is equal to $\bigcap_{s \in \mathcal{S}} s * X = \overline{\lim}_{s \in (\mathcal{S},|)} s * X$, hence is semiconvex. Similarly, for a particular $\lambda \in (0; 1)$, a largest closed subset $A \subset X$ such that $\lambda : A^2 \to A$ is surjective is equal to $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} [\lambda, 1 - \lambda]^n * X$. Obviously

$$\bigcap_{n \in \mathbb{N}} [\lambda, 1 - \lambda]^n * X \supset \bigcap_{s \in \mathcal{S}} s * X.$$

On the other hand, $\max[\lambda, 1 - \lambda]^n \to 0$ as $n \to \infty$, therefore

$$\bigcap_{n \in \mathbb{N}} [\lambda, 1 - \lambda]^n * X \subset \overline{\lim}_{\max s \to 0} s * X,$$

and by the latter lemma

$$\overline{\lim}_{s \in (\mathcal{S},|)} s * X = \overline{\lim}_{\max s \to 0} s * X.$$

Therefore all the constructed sets are equal. We call any of them the *weak center* of X and denote it by $WCtr(X)$. Since

$$WCtr(X) = \bigcap_{\substack{n \in \mathbb{N}, \lambda_1, \ldots, \lambda_n \in I, \\ \lambda_1 + \cdots + \lambda_n = 1}} \{(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)(x_1, \ldots, x_n) \mid x_1, \ldots, x_n \in X\},$$

$$Ctr(X) = \bigcap_{\substack{n \in \mathbb{N}, \lambda_1, \ldots, \lambda_n \in I, \\ \lambda_1 + \cdots + \lambda_n = 1}} \{(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)(x, \ldots, x) \mid x \in X\},$$

we obtain $Ctr(X) \subset WCtr(X)$.

Recall that $X_0 = WCtr(X)$ is semiconvex and closed in X, therefore is a semiconvex compactum as well. Denote $[\frac{1}{n}, \ldots, \frac{1}{n}](x, \ldots, x) = \langle\frac{1}{n}\rangle x$. For all $m, n \in \mathbb{N}$, the mapping $\langle\frac{1}{n}\rangle(-) : X_0 \to X_0$ is a non-expanding surjection, hence an isometry, w.r.t. all d_α, and $\langle\frac{1}{mn}\rangle x = \langle\frac{1}{m}\rangle \circ \langle\frac{1}{n}\rangle x = \langle\frac{1}{n}\rangle \circ \langle\frac{1}{m}\rangle x$ for all $x \in X$. Therefore $\langle\frac{1}{m}\rangle^{-1} \circ \langle\frac{1}{n}\rangle x = \langle\frac{1}{km}\rangle^{-1} \circ \langle\frac{1}{kn}\rangle x$ for all $m, n, k \in \mathbb{N}$, $x \in X_0$, and we use the latter expression as a definition of $\langle\frac{m}{n}\rangle x$. In particular, $\langle n\rangle x = \langle\frac{1}{n}\rangle^{-1} x$.

Thus an action of the multiplicative group $\mathbb{Q}^+$ on X_0 is obtained.

Lemma 2.4. *The obtained action $\mathbb{Q}^+ \times X_0 \to X_0$ is equicontinuous (with $x \in X_0$ as a parameter) w.r.t. all d_α and a standard metric on $\mathbb{Q}^+ \subset \mathbb{R}$.*

Proof. For each $\varepsilon > 0$, $\alpha \in \mathcal{A}$ there is $0 < \delta < 1$ such that $d_\alpha(\lambda(a, b), b) < \varepsilon$ whenever $a, b \in X$, $\lambda \in I$, $\lambda < \delta$. Let $x \in X_0$, $p, q \in \mathbb{Q}^+$, $p(1 - \delta) < q < p/(1 - \delta)$. If $p = q$, then $\langle p\rangle x = \langle q\rangle x$. If $q < p$, we can assume that $p = \frac{m}{n}$, $q = \frac{m}{n'}$, $n < n' < n/(1 - \delta)$. Denote $y = \langle m\rangle x$, then $\langle\frac{m}{n}\rangle x = [\frac{1}{n}, \ldots, \frac{1}{n}]y$,, $\langle\frac{m}{n'}\rangle x = [\frac{1}{n'}, \ldots, \frac{1}{n'}]y$, and

$$[\frac{1}{n'}, \ldots, \frac{1}{n'}]y = \frac{n' - n}{n'}([\frac{1}{n' - n}, \ldots, \frac{1}{n' - n}]y, [\frac{1}{n}, \ldots, \frac{1}{n}]y).$$

Observe that $0 < \frac{n' - n}{n'} < \delta$, hence

$$d_\alpha(\langle p\rangle x, \langle q\rangle x) = d_\alpha([\frac{1}{n}, \ldots, \frac{1}{n}]y, [\frac{1}{n'}, \ldots, \frac{1}{n'}]y) < \varepsilon.$$

If $q > p$, then $q < p < q/(1 - \delta)$, and we similarly prove that the previous inequality is valid. Thus we have constructed a neighborhood $Op = (p(1 - \delta), p/(1 - \delta)) \cap \mathbb{Q}^+$ of p such that $q \in Op$ implies $d_\alpha(\langle p\rangle x, \langle q\rangle x) < \varepsilon$ for all $x \in X_0$. $\square$

Therefore an action $\langle \ldots \rangle$ of $\mathbb{Q}^+$ on X_0 can be uniquely extended to a continuous action, of $\mathbb{R}^+$ on X_0, for which we preserve the same denotation $\langle \ldots \rangle$. We define a new operation

$\diamond : X_0 \to X_0 \times I \to X_0$ by the formula $\lambda \diamond (x, y) = \lambda(\langle \frac{1}{\lambda} \rangle x, \langle \frac{1}{1-\lambda} \rangle y)$ if $0 < \lambda < 1$, $1 \diamond (x, y) = x$, $0 \diamond (x, y) = y$ for all $x, y \in X_0$. It is straightforward to verify that for "$\diamond$" the properties (1)–(3), (4'), (5) are valid, hence $(X_0, \diamond)$ is a convex compactum. We arrive at the following statement:

Theorem 2. *A semiconvex compactum X is a weak center of some semiconvex compactum if and only if there exist a continuous operation $\diamond : X \times X \times I \to X$ and a continuous action $\langle \dots \rangle$ of $(0; +\infty)$ on X such that $(X, \diamond)$ is a convex compactum, all mappings $\langle \lambda \rangle : (X, \diamond) \to (X, \diamond)$ are affine, and, for all $x, y \in X$, $\lambda \in (0; 1)$, the equality $\lambda(x, y) = \lambda \diamond (\langle \lambda \rangle x, \langle 1 - \lambda \rangle y)$ holds. These "$\diamond$" and "$\langle \dots \rangle$" are uniquely determined.*

Remark 2.1. *The center $Ctr(X)$ is a subset of $WCtr(X)$ that consists of all points x such that $\langle \lambda \rangle x = x$ for all $\lambda \in (0; +\infty)$ and the previously defined action $\langle \dots \rangle$.*

Definition. *If $Ctr(X) = WCtr(X)$, then we call X a* strongly semiconvex compactum.

Here is an alternative definition: a semiconvex compactum X is called strongly semiconvex if for any $x \in X$ the point $[\lambda_1, \dots, \lambda_n]x$ converges to a unique point $y \in X$ whenever $\lambda_1, \dots, \lambda_n \geqslant 0$, $\lambda_1 + \dots + \lambda_n = 1$, $\max\{\lambda_1, \dots, \lambda_n\} \to 0$. This implies that if $f : X \to Y$ is an affine surjective map of strongly semiconvex compacta, and X is strongly semiconvex, then Y is strongly semiconvex as well.

Many (but not all) "real-life" examples of semiconvex compacta belong to this class, e.g. the previously mentioned hyperspace $\exp K$ of closed non-empty subsets of a convex compactum K.

By the above, for all $x \in X$, we have $d_\alpha([\lambda_1, \dots, \lambda_n]x, WCtr(X)) \to 0$ as $\max[\lambda_1, \dots, \lambda_n] \to 0$. Now we are going to extend results of [8] and to clarify the behaviour if the expression $[\lambda_1, \dots, \lambda_n]x$ in a simpler case $\lambda_1 = \dots = \lambda_n = \frac{1}{n}$.

For all $x \in X$ and $n \in \mathbb{N}$, let a sequence $\bar{x}$ in X be defined by the formula $\bar{x}_n = \langle \frac{1}{n} \rangle x$. On the set $X^{\mathbb{N}}$ of all sequences in X we consider a pseudometric $\bar{d}_\alpha$, which is defined as follows:

$$\bar{d}_\alpha((x_n), (y_n)) = \overline{\lim_{n \to \infty}} d_\alpha(x_n, y_n), \quad (x_n), (y_n) \in X^{\mathbb{N}}.$$

Theorem 3. *For each $x \in X$, there is a unique $x_0 \in WCtr(X)$ such that $d_\alpha(\langle \frac{1}{n} \rangle x, \langle \frac{1}{n} \rangle x_0) \to 0$ as $n \to \infty$ for all $\alpha \in \mathcal{A}$. The mapping $wbX : X \to WCtr(X)$ that sends each x to the respective x_0 is an affine and non-expanding w.r.t. all d_α retraction of a semiconvex compactum X onto its weak center $WCtr(X)$, and satisfies the equality $bX \circ wbX = bX$.*

Proof. For all $\alpha \in \mathcal{A}$, the mapping $(X, d_\alpha) \to (X^{\mathbb{N}}, \bar{d}_\alpha)$ that sends each x to $\bar{x}$, is non-expanding, and its restriction to $WCtr(X)$ is an isometry because $d_\alpha(\langle \frac{1}{n} \rangle x_1, \langle \frac{1}{n} \rangle x_2) = d_\alpha(x_1, x_2)$ for all $x_1, x_2 \in WCtr(X)$. Thus the uniqueness is immediate.

Let $x \in X$, $\alpha \in \mathcal{A}$. The sequence $(d_\alpha(\langle \frac{1}{n} \rangle x, WCtr(X)))_{n \in \mathbb{N}}$ tends to zero, therefore there is a sequence (y_n) in $WCtr(X)$ such that $d_\alpha(\langle \frac{1}{n} \rangle x, y_n) \to 0$ as $n \to \infty$. For all $n \in \mathbb{N}$, choose $x_n \in WCtr(X)$ such that $\langle \frac{1}{n} \rangle x_n = y_n$. Since $WCtr(X)$ is a compactum, there is a subsequence (x_{n_i}) that converges to some $x_0 \in WCtr(X)$, hence $d_\alpha(\langle \frac{1}{n_i} \rangle x_0, y_{n_i}) \to 0$ as $i \to \infty$. By the triangle inequality for d_α, we obtain that $d_\alpha(\langle \frac{1}{n_i} \rangle x, \langle \frac{1}{n_i} \rangle x_0) \to 0$, $i \to \infty$.

For each $\varepsilon > 0$, there is $i \in \mathbb{N}$ such that $d_\alpha(\langle \frac{1}{n_i} \rangle x, \langle \frac{1}{n_i} \rangle x_0) < \varepsilon/3$. We can also choose $m \in \mathbb{N}$ such that, for all $x, y \in X$, $\lambda \in I$, the inequality $\lambda \leqslant \frac{1}{m}$ implies $d_\alpha(\lambda(x, y), y) < \varepsilon/3$. Let $n \geqslant n_0 = mn_i$, then $n = kn_i + l$, $k \geqslant m$, $0 \leqslant l < n_i$. We have:

$$d_\alpha(\langle \frac{1}{kn_i} \rangle x, \langle \frac{1}{kn_i} \rangle x_0) = d_\alpha(\langle \frac{1}{k} \rangle \langle \frac{1}{n_i} \rangle x, \langle \frac{1}{k} \rangle \langle \frac{1}{n_i} \rangle x_0) \leqslant d_\alpha(\langle \frac{1}{n_i} \rangle x, \langle \frac{1}{n_i} \rangle x_0) < \varepsilon/3.$$

If $l \neq 0$, then:

$$\begin{gathered} d_\alpha(\langle \frac{1}{n} \rangle x, \langle \frac{1}{n} \rangle x_0) = d_\alpha(\langle \frac{1}{kn_i + l} \rangle x, \langle \frac{1}{kn_i + l} \rangle x_0) = \\ d_\alpha(\frac{l}{kn_i + l}(\langle \frac{1}{l} \rangle x, \langle \frac{1}{kn_i} \rangle x), \frac{l}{kn_i + l}(\langle \frac{1}{l} \rangle x_0, \langle \frac{1}{kn_i} \rangle x_0)) \leqslant \\ d_\alpha(\frac{l}{kn_i + l}(\langle \frac{1}{l} \rangle x, \langle \frac{1}{kn_i} \rangle x), \langle \frac{1}{kn_i} \rangle x) + d_\alpha(\langle \frac{1}{kn_i} \rangle x, \langle \frac{1}{kn_i} \rangle x_0) + \\ d_\alpha(\langle \frac{1}{kn_i} \rangle x_0, \frac{l}{kn_i + l}(\langle \frac{1}{l} \rangle x_0, \langle \frac{1}{kn_i} \rangle x_0)) < \varepsilon/3 + \varepsilon/3 + \varepsilon/3 = \varepsilon, \end{gathered}$$

Hence $d_\alpha(\langle \frac{1}{n} \rangle x, \langle \frac{1}{n} \rangle x_0)$ for all $n \geqslant n_0$. Therefore $d_\alpha(\langle \frac{1}{n} \rangle x, \langle \frac{1}{n} \rangle x_0) \to 0$, $n \to \infty$, for at least one $x_0 \in WCtr(X)$. For a particular pseudometric d_α, such x_0 form a closed set, and the family of all such sets is filtered because the family $(d_\alpha)_{\alpha \in \mathcal{A}}$ is directed. Therefore there is $x_0 \in WCtr(X)$ such that $(d_\alpha(\langle \frac{1}{n} \rangle x, \langle \frac{1}{n} \rangle x_0)) \to 0$, $n \to \infty$, for all $\alpha \in \mathcal{A}$. Thus a required x_0 exists and is unique.

Observe that, for all $\alpha \in \mathcal{A}$, $x, y \in X$, and $x_0 = wbX(x)$, $y_0 = wbX(y)$, we have $d_\alpha(x_0, y_0) = \bar{d}_\alpha(\bar{x}, \bar{y}) \leqslant d_\alpha(x_0, y_0)$, hence wbX is non-expanding. The equality $wbX(x) = x$ for $x \in WCtr(X)$ and preservation of semiconvex combinations by wbX are obvious.

Let the set $\mathbb{N} \times \mathcal{S}$ be partially ordered as follows: $(m, s) | (n, t)$ if $m | n$ (i.e. m divides n), $s | t$. For $x \in X$, consider the net $(s[\frac{1}{n}, \dots, \frac{1}{n}]x)_{(n,s) \in (\mathbb{N} \times \mathcal{S}, |)}$. It is obvious that it converges to $bX(x)$. If $s \in \mathcal{S}$ is fixed, then $(s[\frac{1}{n}, \dots, \frac{1}{n}]x)_{n \in (\mathbb{N}, |)}$ uniformly w.r.t. s and x converges to $s(wbX(x))$, and $(s(wbX(x))_{s \in (\mathcal{S}, |)}$ converges to $bX(wbX(x))$. Thus $bX(x) = bX(wbX(x))$ for all $x \in X$. □

3 Spaces of atomized measures as free semiconvex compacta

Let $\mathcal{SC}$onv, $\mathcal{SSC}$onv, and $\mathcal{WSC}$onv be the categories that consist of all semiconvex compacta, of all strongly semiconvex compacta, and of all semiconvex compacta that coincide with their weak centers, respectively, and of all affine continuous mappings of these spaces. There are obvious forgetful functors:

$$\begin{tikzcd}
 & \mathcal{C}\mathrm{onv} \arrow[dl, "U_{ss}"'] \arrow[dr, "U_w"] \arrow[dd, "U_s"] & \\
\mathcal{SSC}\mathrm{onv} \arrow[dr, "U_s^{ss}"] \arrow[ddr, "U^{ss}"'] & & \mathcal{WSC}\mathrm{onv} \arrow[dl, "U_s^w"'] \arrow[ddl, "U^w"] \\
 & \mathcal{SC}\mathrm{onv} \arrow[d, "U^s"] & \\
 & \mathcal{C}\mathrm{omp} &
\end{tikzcd}$$

Our goal is to construct free objects, and hence left adjoints [7] to these functors. Recall that a left adjoint to the composition $U^s \circ U_s : \mathcal{C}\mathrm{onv} \to \mathcal{C}\mathrm{omp}$ is known (the *probability measure functor* P [3, 10]) and thoroughly invesigated.

The "upper part" is easier. Observe first that, for a morphism $f : X \to Y$ in $\mathcal{SC}\mathrm{onv}$, the inclusions $f(Ctr(X)) \subset Ctr(Y)$, $f(WCtr(X)) \subset WCtr(Y)$ and the equalities $bY \circ f = f \circ bX$, $wbY \circ f = f \circ wbX$ are valid. Thus we denote by $Ctr(f) : Ctr(X) \to Ctr(Y)$ and $WCtr(f) : WCtr(X) \to WCtr(Y)$ the restrictions of f. They are morphisms in $\mathcal{C}\mathrm{onv}$ and $\mathcal{WSC}\mathrm{onv}$, resp., hence we obtain functors $Ctr : \mathcal{SC}\mathrm{onv} \to \mathcal{C}\mathrm{onv}$ and $WCtr : \mathcal{SC}\mathrm{onv} \to \mathcal{WSC}\mathrm{onv}$.

Then the following statements, which extend Theorem 3 [8], are at hand.

Theorem 4. *The functor Ctr is a left adjoint to the embedding of categories $U_s : \mathcal{C}\mathrm{onv} \to \mathcal{SC}\mathrm{onv}$, $bX : X \to Ctr(X)$ is a component of a natural transformation $b : \mathbf{1}_{\mathcal{SC}\mathrm{onv}} \to Ctr$, which is a unit of the adjunction. The restrictions of Ctr to $\mathcal{SSC}\mathrm{onv}$ and $\mathcal{WSC}\mathrm{onv}$ are left adjoints to the embeddings $U_{ss} : \mathcal{C}\mathrm{onv} \to \mathcal{SSC}\mathrm{onv}$ and $U_w : \mathcal{C}\mathrm{onv} \to \mathcal{WSC}\mathrm{onv}$, respectively.*

Similarly:

Theorem 5. *The functor $WCtr$ is a left adjoint to the embedding of categories $U_s^w : \mathcal{WSC}\mathrm{onv} \to \mathcal{SC}\mathrm{onv}$, $wbX : X \to WCtr(X)$ is a component of a natural transformation $wb : \mathbf{1}_{\mathcal{SC}\mathrm{onv}} \to WCtr$, which is a unit of the adjunction.*

On other words, $\mathcal{C}\mathrm{onv} \subset \mathcal{SC}\mathrm{onv}$ and $\mathcal{WSC}\mathrm{onv} \subset \mathcal{SC}\mathrm{onv}$ are *reflective* subcategories, and Ctr and $WCtr$ are *reflectors* [7].

Remark. *We leave as open the problem of explicit construction of a left adjoint to the embedding $U_s^{ss} : \mathcal{SSC}\mathrm{onv} \to \mathcal{SC}\mathrm{onv}$, although its existence is known.*

Now we consider the "lower part" of the diagram.

Proposition 3.1. *Let X be a compactum, $\langle\!\langle \ldots \rangle\!\rangle : (0;+\infty) \to G$ be a continuous homomorphism into a compact Hausdorff Abelian topological group. Let $Z = P(X \times I \times G)$, $h_\lambda(x,t,g) = (x, \lambda t, \langle\!\langle \lambda \rangle\!\rangle g)$ for all $(x,t,g) \in Z$, $\lambda \in (0;1]$. With an operation $c : Z \times Z \times I \to Z$ that is defined by the formula*

$$c(m_1, m_2, \lambda) = \lambda P h_\lambda(m_1) + (1-\lambda) P h_{1-\lambda}(m_2),\ 0 < \lambda < 1,$$

and $c(m_1, m_2, 1) = m_1$, $c(m_1, m_2, 0) = m_2$ for all $m_1, m_2 \in Z$, Z is a semiconvex compactum.

The weak center of Z is equal to $P(X \times \{0\} \times G)$, and the mapping wbZ is equal to Pp_0, where $p_0 : X \times I \times G \to X \times \{0\} \times G$ takes each (x,t,g) to $(x,0,g)$,

Proof. Properties (1)-(3) are obvious, only (4') has to be verified. Let the topologies on X and on G be defined by directed families of pseudometrics $(\rho_\beta)_{\beta \in \mathcal{B}}$ and $(\theta_\gamma)_{\gamma \in \Gamma}$ respectively, and all θ_γ be invariant, i.e. $\theta_\gamma(a,b) = \theta_\gamma(ac, bc)$ for all $a, b, c \in G$. Then the functions $d_{\beta,\gamma} : Z \times Z \times I \to Z$, which are defined by the formula, for $\beta \in \mathcal{B}$, $\gamma \in \Gamma$:

$$d_{\beta,\gamma}(m_1, m_2) = \sup\bigl\{|m_1(\varphi) - m_2(\varphi)| \ \big|\ |\varphi(x_1,t_1,g_1) - \varphi(x_2,t_2,g_2)| < \max\{\rho_\beta(x_1,x_2),$$
$$|t_1 - t_2|, \theta_\gamma(g_1,g_2)\} \text{ for all } (x_1,t_1,g_1), (x_2,t_2,g_2) \in X \times I \times G\bigr\},\ m_1, m_2 \in Z,$$

form a family of pseudometrics, which is required by (4').

Observe that if $m \in Z$, $\operatorname{supp} m \ni (x,t,g)$, $t > 0$, then m is not equal to any $(\frac{1}{n}, \ldots, \frac{1}{n})(m_1, \ldots, m_n)$, $m_1, \ldots, m_n \in Z$, whenever $\frac{1}{n} < t$. Hence $WCtr(Z) \subset P(X \times \{0\} \times G)$. On the other hand, if $m \in P(X \times \{0\} \times G)$, $0 < \lambda < 1$, then

$$m = \lambda(m_1, m_2),\ m_1 = P\bigl(\mathbf{1}_X \times \mathbf{1}_I \times \langle\!\langle \tfrac{1}{\lambda} \rangle\!\rangle(-)\bigr)(m),\ m_2 = P\bigl(\mathbf{1}_X \times \mathbf{1}_I \times \langle\!\langle \tfrac{1}{1-\lambda} \rangle\!\rangle(-)\bigr)(m).$$

Since $m_1, m_2 \in P(X \times \{0\} \times G)$, we obtain $WCtr(Z) = P(X \times \{0\} \times G)$. For $m \in Z$, $m_0 = Pp_0(m)$, $\beta \in \mathcal{B}$, $\gamma \in \Gamma$, we have $m_0 \in P(X \times \{0\} \times G)$ and $d_{\beta,\gamma}(\langle \frac{1}{n} \rangle m, \langle \frac{1}{n} \rangle m_0) \to 0$ as $n \to \infty$, therefore $wbZ(m) = Pp_0(m)$. □

We are interested in the two particular cases: $G = \{e\}$ and $G = bohr\,\mathbb{R}^+$ with $\langle\!\langle \lambda \rangle\!\rangle = b_{\mathbb{R}^+}(\lambda)$.

Corollary 3.1. *The sets $P^a X \subset P(X \times I) \cong P(X \times I \times \{e\})$ and $P^b X \subset P(X \times I \times bohr\,\mathbb{R}^+)$ are semiconvex w.r.t. the just defined semiconvex combinations.*

Proof is straightforward. Hence $P^a X$ and $P^b X$ are semiconvex compacta, and it is easy to see that $P^a X$ is strongly semiconvex. Moreover, for a continuous mapping of compacta $f : X \to Y$, the mappings $P^a f : P^a X \to P^a Y$ and $P^b f : P^b X \to P^b Y$ are affine, thus we can regard P^a and P^b as functors $\mathcal{C}\mathrm{omp} \to \mathcal{SSC}\mathrm{onv}$ and $\mathcal{C}\mathrm{omp} \to \mathcal{SC}\mathrm{onv}$, resp.

There are embeddings $\eta^a X : X \hookrightarrow P^a X$ and $\eta^b X : X \hookrightarrow P^b X$, namely:

$$\eta^a X(x) = \delta_{(x,1)},\ \eta^b X(x) = \delta_{(x,1,b_{\mathbb{R}^+}(1))},\ x \in X.$$

Theorem 6. *For a compactum X, the pairs $(P^a X, \eta^a X)$ and $(P^b X, \eta^b X)$ are free objects over X in $\mathcal{SSC}\mathrm{onv}$ and $\mathcal{SC}\mathrm{onv}$, respectively, and the functors $P^a : \mathcal{C}\mathrm{omp} \to \mathcal{SSC}\mathrm{onv}$ and $P^b : \mathcal{C}\mathrm{omp} \to \mathcal{SC}\mathrm{onv}$ are left adjoints to $U^{ss} : \mathcal{SSC}\mathrm{onv} \to \mathcal{C}\mathrm{omp}$ and $U^s : \mathcal{SC}\mathrm{onv} \to \mathcal{C}\mathrm{omp}$, respectively.*

Proof. Let Y be a semiconvex compactum with a directed family $(d_\alpha)_{\alpha \in \mathcal{A}}$ that satisfies (4'), and $f : X \to Y$ a continuous mapping. Assume that $\bar{f} : P^b X \to Y$ is an affine continuous extension of f. Then, for all $x_1, \ldots, x_n \in X$, $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in (0;1]$ such that $\lambda_1 + \cdots + \lambda_n = 1$, we have

$$\sum_{i=1}^{n} \lambda_i \delta(x_i, \lambda_1, b_{\mathbb{R}^+}(\lambda_i)) = (\lambda_1, \ldots, \lambda_n)(\eta^b(x_1), \ldots, \eta^b(x_n)),$$

therefore

$$\bar{f}\Bigl(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i \delta(x_i, \lambda_1, b_{\mathbb{R}^+}(\lambda_i))\Bigr) = (\lambda_1, \ldots, \lambda_n)(f(x_1), \ldots, f(x_n)).$$

By continuity

$$\bar{f}\Bigl(\sum_{i=1}^{\infty} \lambda_i \delta(x_i, \lambda_1, b_{\mathbb{R}^+}(\lambda_i))\Bigr) = (\lambda_1, \lambda_2, \ldots)(f(x_1), f(x_2), \ldots)$$

also for all countable sequences $x_1, x_2, \dots \in X$, $\lambda_1, \lambda_2, \dots \in (0;1]$ such that $\sum_{i=1}^{\infty} \lambda_i = 1$.

Now let $m = \delta_{(x,0,g)} \in P(X \times \{0\} \times bohr\,\mathbb{R}^+)$. Take a net (n_β) in $\mathbb{N}$ which existence for $g^{-1} \in bohr\,\mathbb{R}^+$ is guaranteed by Lemma 1.1. Then $(n_\beta) \to +\infty$, $b_{\mathbb{R}^+}(\frac{1}{n_\beta}) \to g$ imply $(x, \frac{1}{n_\beta}, b_{\mathbb{R}^+}(\frac{1}{n_\beta})) \to (x, 0, g)$, hence

$$\bar{f}(n_\beta \frac{1}{n_\beta} \delta_{(x,\frac{1}{n_\beta},b_{\mathbb{R}^+}(\frac{1}{n_\beta}))}) = \langle \frac{1}{n_\beta} \rangle \bar{f}(\eta^b X(x)) = \langle \frac{1}{n_\beta} \rangle f(x) \to \bar{f}(\delta_{(x,0,g)}) = \bar{f}(m).$$

Therefore $\bar{f}(m) \in Y_0 = WCtr(Y)$, and the net $\langle \frac{1}{n_\beta} \rangle (wbY(f(x))$ in Y_0 by Theorem 3 converges to $\bar{f}(m)$ as well. Let $Iso(Y_0)$ be the group of all bijections on Y_0 that preserve all d_α, with the topology of uniform convergence w.r.t. each of d_α. Recall that by Theorem 2 there exist (and are unique) a continuous operation $\diamond : Y_0 \times Y_0 \times I \to Y_0$ and a continuous homomorphism $\langle \ldots \rangle$ of $(0;+\infty)$ into $Iso(Y_0)$ such that $(Y_0, \diamond)$ is a convex compactum, all $\langle \lambda \rangle : (Y_0, \diamond) \to (Y_0, \diamond)$ are affine, and, for all $y_1, y_2 \in Y_0$, $\lambda \in (0;1)$, the equality $\lambda(y_1, y_2) = \lambda \diamond (\langle \lambda \rangle y_1, \langle 1-\lambda \rangle y_2)$ holds. The group $Iso(Y_0)$ is compact Hausdorff, hence there is a unique continuous homomorphism $\langle\langle \ldots \rangle\rangle : bohr\,\mathbb{R}^+ \to Iso(Y_0)$ such that $\langle\langle b_{\mathbb{R}^+}(\lambda) \rangle\rangle = \langle \lambda \rangle$ for all $\lambda \in \mathbb{R}_+$. Then $\langle \frac{1}{n_\beta} \rangle (wbY(f(x)) = \langle\langle b_{\mathbb{R}^+}(\frac{1}{n_\beta}) \rangle\rangle (wbY(f(x)) \to \langle\langle g \rangle\rangle (wbY(f(x))$, thus obtain $\bar{f}(\delta_{(x,0,g)}) = \langle\langle g \rangle\rangle (wbY(f(x))$.

Now let $m = \sum_{i=1}^n \lambda_i \delta_{(x_i,0,g_i)} \in P(X \times \{0\} \times bohr\,\mathbb{R}^+)$, $\lambda_i \neq 0$ for $i = 1, \ldots, n$, then

$$m = (\lambda_1, \ldots, \lambda_n)\big(\delta_{(x_1,0,b_{\mathbb{R}^+}(\lambda_1^{-1})g_1)}, \ldots, \delta_{(x_n,0,b_{\mathbb{R}^+}(\lambda_n^{-1})g_n)}\big),$$

hence

$$\begin{gathered} \bar{f}(m) = (\lambda_1, \ldots, \lambda_n)\big(\bar{f}(\delta_{(x_1,0,b_{\mathbb{R}^+}(\lambda_1^{-1})g_1)}), \ldots, \bar{f}(\delta_{(x_n,0,b_{\mathbb{R}^+}(\lambda_n^{-1})g_n)})\big) = \\ (\lambda_1, \ldots, \lambda_n)\big(\langle\langle b_{\mathbb{R}^+}(\lambda_1^{-1})g_1 \rangle\rangle wbY(f(x_1)), \ldots, \langle\langle b_{\mathbb{R}^+}(\lambda_n^{-1})g_n \rangle\rangle wbY(f(x_n))\big) = \\ \lambda_1 \langle \lambda_1 \rangle \langle \lambda_1^{-1} \rangle \langle\langle g_1 \rangle\rangle (wbY(f(x_1))) + \cdots + \lambda_n \langle \lambda_n \rangle \langle \lambda_n^{-1} \rangle \langle\langle g_n \rangle\rangle (wbY(f(x_n))) = \\ \lambda_1 \langle\langle g_1 \rangle\rangle (wbY(f(x_1))) + \cdots + \lambda_n \langle\langle g_n \rangle\rangle (wbY(f(x_n))). \end{gathered}$$

Since measures with finite supports are dense in $P(X \times \{0\} \times bohr\,\mathbb{R}^+)$, there can be at most one continuous mapping $P(X \times \{0\} \times bohr\,\mathbb{R}^+) \to Y_0$ that agrees with the above equality, and it is determined by the formula:

$$\bar{f}(m) = cY_0 \circ P(H_f)(m),\ m \in P(X \times \{0\} \times bohr\,\mathbb{R}^+),$$

here $cY_0 : PY_0 \to Y_0$ is a *barycenter map* which takes each probability measure on the convex compactum Y_0 to its barycenter, and $H_f : X \times \{0\} \times bohr\,\mathbb{R}^+ \to Y_0$ takes each $(x, 0, g)$ to $\langle\langle g \rangle\rangle (wbY(f(x))$.

Now we are ready to study a "mixed" case

$$m = \lambda_0 m_0 + \sum_{i=1}^{N} \lambda_i \delta(x_i, \lambda_i, b_{\mathbb{R}^+}(\lambda_i)) \in P^b(X),\ m_0 \in P(X \times \{0\} \times bohr\,\mathbb{R}^+),$$

N is either finite or ∞. Such m is a combination of measures of previously considered forms:

$$m = \lambda_0\big(P(\mathbf{1}_{X \times \{0\}} \times b_{R^+}(\lambda_0^{-1})(-))(m_0), \sum_{i=1}^{N} \frac{\lambda_i}{1-\lambda_0} \delta(x_i, \frac{\lambda_i}{1-\lambda_0}, b_{\mathbb{R}^+}(\frac{\lambda_i}{1-\lambda_0}))\big),$$

hence

$$\begin{gathered} \bar{f}(m) = \lambda_0\big(\bar{f}\big(P\big(\mathbf{1}_{X \times \{0\}} \times b_{R^+}(\lambda_0^{-1})(-)\big)(m_0)\big), \big(\frac{\lambda_1}{1-\lambda_0}, \frac{\lambda_2}{1-\lambda_0}, \ldots\big)(f(x_1), f(x_2), \ldots)\big) = \\ (\lambda_0, \lambda_1, \lambda_2, \ldots)(cY_0 \circ P(H_{f,\lambda_0})(m_0), f(x_1), f(x_2), \ldots), \end{gathered}$$

here $H_{f,\lambda_0} : X \times \{0\} \times bohr\,\mathbb{R}^+ \to Y_0$ takes each $(x, 0, g)$ to $\langle \lambda_0^{-1} \rangle \langle\langle g \rangle\rangle (wbY(f(x))$.

We obtain formulae which determine $\bar{f}$ uniquely. It is easy to see that such $\bar{f}$ is affine. Due to size limitations we omit a routine but straightforward proof of its continuity. Its idea is that a "part" of a measure that is "close" to the weak center $P(X \times \{0\} \times bohr\ R^+) \subset P^b X$ can be retracted by a "small move" into the weak center, on which the continuity of $\bar{f}$ is known. Only a finite number of Dirac measures will be "left", and $\bar{f}$ also acts continuously at this "part".

Thus $(P^b X, \eta^b X)$ is a free semiconvex compactum over a compactum X, and P^b is a required left adjoint to U_s.

Observe that, for the projection $\mathrm{pr}_{12} : X \times I \times bohr\,\mathbb{R}^+ \to X \times I$, the mapping $P\,\mathrm{pr}_{12} : P(X \times I \times bohr\,\mathbb{R}^+) \to P(X \times I)$ is affine and maps $P^b X$ onto $P^a X$. If Y is strongly semiconvex, then the used action $\langle\langle \ldots \rangle\rangle$ of $bohr\,\mathbb{R}^+$ on $WCtr(Y) = Ctr(Y)$ is trivial, i.e. $\langle\langle g \rangle\rangle = \mathbf{1}_{Ctr(Y)}$ for all $g \in bohr\,\mathbb{R}^+$, hence a rapid glance at the formulae shows that $\bar{f}(m_1) = \bar{f}(m_2)$ whenever $P\,\mathrm{pr}_{12}(m_1) = P\,\mathrm{pr}_{12}(m_2) \in P^a X$. Therefore there is a unique $\bar{\bar{f}} : P^a X \to Y$ such that $\bar{\bar{f}} \circ P\,\mathrm{pr}_{12}|_{P^b X} = \bar{f}$. Taking into account $P\,\mathrm{pr}_{12} \circ \eta^b X = \eta^a X$, we obtain that $(P^a X, \eta^a X)$ is a free strongly semiconvex compactum over a compactum X, and P^a is a left adjoint functor to U^{ss}. □

Now we have left adjoints $WCtr$ to U_s^w and P^b to U^s and can combine them to obtain a left adjoint to $U^w : \mathcal{WSC}\mathrm{onv} \to \mathcal{C}\mathrm{omp}$. Recall that $WCtr(P^b X) = P(X \times \{0\} \times bohr\,\mathbb{R}^+) \cong P(X \times bohr\,\mathbb{R}^+)$, hence the latter space is an object of $\mathcal{WSC}\mathrm{onv}$.

Corollary 3.2. *The functor $P(- \times bohr\,\mathbb{R}^+) : \mathcal{C}\mathrm{omp} \to \mathcal{WSC}\mathrm{onv}$ is a left adjoint to $U^w : \mathcal{WSC}\mathrm{onv} \to \mathcal{C}\mathrm{omp}$, and a free object over a compactum X is of the form $(P(X \times bohr\,\mathbb{R}^+), \eta^w X)$, $\eta^w X : X \to P(X \times bohr\,\mathbb{R}^+)$ is defined by the equality $\eta^w X(x) = \delta_{(x,b_{\mathbb{R}^+}(1))}$, $x \in X$.*

FINAL REMARKS

Thus we have shown that spaces of normalized (weakly) atomized measures are free (strongly) semiconvex compacta. We can consider an atomized measure either as a result of concentration of some part of "mass" in atoms, or, conversely, as a limit of "totally atomized" distributions of mass. In the latter case, even if some atoms "have dissolved", there is a reason to consider "origins" of parts of the "liquid mass". This has been formalized in a more complicated definition of atomized measure, which takes into account the *compactness* of an underlying space.

Our constructions are functorial, but the respective functors are not as "good" as the probability measure functor, in particular, they do not preserve the class of singletons and therefore do not belong to the introduced by Schepin class of normal functors.

The obtained adjunctions lead to monads and therefore to respective categories of algebras. Nevertheless, these categories are not of much interest by themselves because by results of [9] the considered forgetful functors are *monadic*.

It is also interesting whether there is a simple explicit procedure of "making a semiconvex compactum stronger", more constructive than building equalizers.

References

1. Adams J.F. Lectures on Lie groups. W.A. Benjamin Inc, N.Y. – Amsterdam, 1969.
2. Engelking, R. General topology. PWN, Warsaw, 1977.
3. Fedorchuk V.V. *Functors of probability measures in topological categories*, Journal of Mathematical Sciences **91**(4) (1988) 47–95.
4. Glushkov V.M. *Structure of locally bicompact groups and the fifth problem of Hilbert* (in Russian), Uspekhi Mat. Nauk **12** (1957) 3–41.
5. Golan J. Semirings and their applications. Kluwer Academic Publishers, Boston, 1999.
6. Loomis L.H. An introduction to abstract harmonic analysis, van Nostrand, N.Y., 1953.
7. Mac Lane S. Categories for the working mathematician. 2nd ed., Springer-Verlag, N.Y., 1998.
8. Nykyforchyn O.R. *Semiconvex compacta*, Comm. Math. Univ. Carol. **38**(4) (1997) 761–774.
9. Nykyforchyn O.R. *Tripleability of the category of (strongly) semiconvex compacta over the category of compacta*, Visn. LNU, Ser. Mech. Mat. **61** (2003) 141–147.
10. Świrszcz, T.: *Monadic functors and convexity*, Bull. Acad. Pol. Sci. Sér. Sci. Mat., Astron. et Phys. **22**(1) (1974) 39–42.
11. Teleiko A., Zarichnyi M. Categorical topology of compact Hausdorff spaces. Math. Studies Monograph Series. V. 5. VNTL Publishers, Lviv, 1999.

Precarpathian National University,
Ivano-Frankivsk, Ukraine

Received 06.09.2010

Никифорчин О.Р. *Розпорошені міри і напівопуклі компакти* // Карпатські математичні публікації. — 2010. — Т.2, №2. — С. 83–100.

Запроваджено класс розпорошених мір на компактах, які є узагальненням регулярних дійснозначних мір. Показано також, що простір нормованих (слабко) розпорошених мір на компакті є вільним об'єктом над цим компактом у категорії (сильно) напівопуклих компактів.

Никифорчин О.Р. *Распыленные меры и полувыпуклые компакты* // Карпатские математические публикации. — 2010. — Т.2, №2. — С. 83–100.

Введен класс распыленных мер на компактах, обобщающих регулярные действительнозначные меры. Также показано, что пространство нормированных (слабо) распыленных мер на компакте является свободным объектом над этим компактом в категории (сильно) полувыпуклых компактов.

Карпатські математичні публікації. Т.2, №2

Carpathian Mathematical Publications. V.2, №2

УДК 517.95+511.42

Савка І.Я.

НЕЛОКАЛЬНА ЗАДАЧА ІЗ ЗАЛЕЖНИМИ КОЕФІЦІЄНТАМИ В УМОВАХ ДЛЯ РІВНЯННЯ ДРУГОГО ПОРЯДКУ ЗА ЧАСОВОЮ ЗМІННОЮ

Савка І.Я. *Нелокальна задача із залежними коефіцієнтами в умовах для рівняння другого порядку за часовою змінною* // Карпатські математичні публікації. — 2010. — Т.2, №2. — С. 101–110.

У декартовому добутку часового відрізка та просторового багатовимірного тора досліджено нелокальну двоточкову задачу із залежними коефіцієнтами в умовах для безтипного диференціального рівняння із частинними похідними другого порядку за часовою змінною, які розташовані на деякій гладкій кривій. Встановлено умови однозначної розв'язності задачі. Доведено метричну теорему про оцінку знизу малих знаменників на гладкій кривій.

Вступ. Основні позначення

Нелокальні задачі для рівнянь із частинними похідними, в загальному, є некоректними за Адамаром, а їх розв'язність пов'язана з проблемами малих знаменників і є нестійкою стосовно як завгодно малих змін коефіцієнтів задачі та параметрів області (див. [4]). Коректна розв'язність таких задач встановлена для майже всіх (стосовно міри Лебега) векторів, складених із коефіцієнтів рівняння і нелокальних умов. При цьому вважалось, що коефіцієнти задачі *незалежно* змінюються в наперед заданій області.

Для залежних коефіцієнтів ці результати не можна використати безпосередньо, тому у запропонованій роботі на основі метричного підходу розроблено нову методику дослідження нелокальної двоточкової задачі для рівняння із частинними похідними (без обмежень на тип) другого порядку за часовою змінною t у випадку, коли коефіцієнти нелокальних умов є *залежними*. Основні результати роботи анонсовано в [3].

Надалі використовуємо такі позначення: $x \in \mathbb{R}^p$, $k \in \mathbb{Z}^p$, $(k,x) = k_1x_1 + \ldots + k_px_p$, $\widetilde{k} = \left(1 + (k,k)\right)^{1/2}$, $s = (s_1, \ldots, s_p) \in \mathbb{Z}_+^p$, $|s| = s_1 + \ldots + s_p$, $\partial_t^n = \frac{\partial^n}{\partial t^n}$, $\partial_x^s = \partial_{x_1}^{s_1} \ldots \partial_{x_p}^{s_p}$, $\Omega_p = (\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z})^p$ — p-вимірний тор, $\mathcal{D} = [0,T] \times \Omega_p$, $T > 0$.

2000 *Mathematics Subject Classification:* 35G15, 11K60.
Ключові слова і фрази: диференціальні рівняння, нелокальні задачі, малі знаменники, діофантові наближення, залежні коефіцієнти, гладка крива, метрична оцінка.

Введемо простори функцій: $\mathbf{H}_q = \mathbf{H}_q(\Omega_p)$, $q \in \mathbb{R}$, — простір Соболєва отриманих поповненням простору тригонометричних многочленів $\varphi(x) = \sum_k \varphi_k \exp(ik, x)$ за нормою $\|\cdot\|_{\mathbf{H}_q}$, яка породжується скалярним добутком $(\varphi, \psi)_{\mathbf{H}_q} = \sum_{k\in\mathbb{Z}^p} \widetilde{k}^{2q}\varphi_k\bar{\psi}_k$; $\mathbf{H}^n_{N,q} = \mathbf{H}^n_{N,q}(\mathcal{D})$, $q \in \mathbb{R}$, $\{n, N\} \in \mathbb{Z}_+$, — банахів простір функцій $u = u(t,x)$, таких що $\forall\, t \in [0,T]$ функції $\partial_t^j u(t,\cdot)$ належать простору $\mathbf{H}_{q-jN}$ для $j = 0, 1, \ldots, n$ та неперервні на відрізку $[0,T]$ у цьому просторі; норма в $\mathbf{H}^n_{N,q}$ визначається формулою

$$\|u\|^2_{\mathbf{H}^n_{N,q}} = \sum_{j=0}^{n} \max_{t\in[0,T]} \|\partial_t^j u(t,\cdot)\|^2_{\mathbf{H}_{q-jN}}.$$

1 Постановка задачі. Побудова формального розв'язку

В області $\mathcal{D}$ змінних (t,x) розглянемо задачу

$$L(\partial_t, -i\partial_x)u \equiv \partial_t^2 u + A_1(-i\partial_x)\partial_t u + A_2(-i\partial_x)u = 0, \tag{1}$$

$$L_1 u \equiv u|_{t=0} - \mu_1(\tau)u|_{t=T} = \varphi_1, \qquad L_2 u \equiv \partial_t u|_{t=0} - \mu_2(\tau)\partial_t u|_{t=T} = \varphi_2, \tag{2}$$

де

$$A_1(\eta) = \sum_{|s|\le N_1} a_{1,s}\eta^s, \quad A_2(\eta) = \sum_{|s|\le 2N_2} a_{2,s}\eta^s, \quad \{a_{1,s}, a_{2,s}\} \in \mathbb{C}, \{N_1, 2N_2\} \in \mathbb{Z}_+,$$

є многочленами степенів N_1 і $2N_2$ відповідно, $\{\mu_1, \mu_2\} \in C^4(I;\mathbb{R})$, I — відрізок, τ — параметр параметризації, $\varphi_1 = \varphi_1(x)$ та $\varphi_2 = \varphi_2(x)$ — задані функції, $u = u(t,x)$ — шуканий розв'язок.

Зведений порядок N рівняння (1) визначається формулою $N = \max\{N_1, N_2\}$. Число N фігурує у просторах $\mathbf{H}^2_{N,q}$ та в означенні розв'язку задачі (1), (2).

Означення 1.1. *Під розв'язком задачі* (1), (2) *розуміємо функцію* $u \in \mathbf{H}^2_{N,q}$, *що задовольняє умови* $\|L(\partial_t, \partial_x)u\|_{\mathbf{H}^0_{N,q-2N}} = 0$, $\|L_1 u - \varphi_1\|_{\mathbf{H}_q} = 0$, $\|L_2 u - \varphi_2\|_{\mathbf{H}_{q-N}} = 0$.

Із означення 1.1 випливає, що $\varphi_1 \in \mathbf{H}_q$, $\varphi_2 \in \mathbf{H}_{q-N}$ є необхідною умовою розв'язності задачі (1), (2) у просторі $\mathbf{H}^2_{N,q}$.

Вектор-коефіцієнтів $\mu = \big(\mu_1(\tau), \mu_2(\tau)\big)_{\tau\in I}$ описує відрізок гладкої плоскої кривої K і параметризується відрізком I.

Для частинних випадків векторів $\mu = \big(\mu_1(\tau), \ldots, \mu_n(\tau)\big)$, $n \ge 2$, задача типу (1), (2) досліджувалась у роботах [1, 2, 4]. Зокрема, в монографії [4] встановлено коректність задачі для рівняння n-го порядку (за t) з нелокальними умовами вигляду

$$\partial_t^{i-1}u|_{t=0} - \mu_i(\tau)\partial_t^{i-1}u|_{t=T} = \varphi_i, \qquad i = 1, \ldots, n, \tag{3}$$

для майже всіх векторів $(\tau, \vec{a})$ у випадку $\mu_i(\tau) = \tau$, де $\tau \in \mathbb{C}$, $\vec{a}$ — вектор, складений із певних коефіцієнтів диференціального рівняння, а в роботі [2] встановлено коректність задачі для анізотропного (за x) рівняння n-го порядку за змінною t з умовами (3) для майже всіх векторів (τ, T) у випадку $\mu_i(\tau) = \frac{\alpha_i - \tau}{\beta_i + \tau}$, де $\tau \in \mathbb{R}$, $\{\alpha_i, \beta_i\} \in \mathbb{C}$. Розв'язність

задачі у випадку незалежних коефіцієнтів $\mu_i(\tau) \equiv \tau_i$, $\tau_i \in \mathbb{C}$, $i = 1, \ldots, n$, встановлено в [1] для майже всіх векторів $\left(\operatorname{arctg}\frac{\operatorname{Im}\tau_1}{\operatorname{Re}\tau_1}, \ldots, \operatorname{arctg}\frac{\operatorname{Im}\tau_n}{\operatorname{Re}\tau_n}, T, \vec{a}\right)$.

Метою даної роботи є встановлення умов розв'язності задачі (1), (2) у випадку довільної гладкої кривої K на площині $\mathbb{R}^2$. При цьому використано метричний підхід і сформульовано умови розв'язності задачі для майже всіх параметрів $\tau \in I$, тобто для майже всіх точок гладкої кривої K.

Розв'язок u задачі (1), (2) має вигляд ряду

$$u(t,x) = \sum_{k\in\mathbb{Z}^p} u_k(t)e^{(ik,x)}, \tag{4}$$

де $u_k(t)$ — двічі неперервно диференційовні функції на $[0,T]$, а праві частини φ_1 та φ_2 нелокальних умов (2) — рядів $\varphi_1(x) = \sum_{k\in\mathbb{Z}^p} \varphi_{1k}e^{(ik,x)}$, $\varphi_2(x) = \sum_{k\in\mathbb{Z}^p} \varphi_{2k}e^{(ik,x)}$.

Із означення (1.1) отримаємо для кожної з функцій $u_k(t)$, де $k \in \mathbb{Z}^p$, таку задачу:

$$L(d/dt, k)u_k \equiv u_k''(t) + A_1(k)u_k'(t) + A_2(k)u_k(t) = 0, \tag{5}$$

$$L_1 u_k \equiv u_k(0) - \mu_1(\tau)u_k(T) = \varphi_{1k}, \qquad L_2 u_k \equiv u_k'(0) - \mu_2(\tau)u_k'(T) = \varphi_{2k}. \tag{6}$$

Розглянемо характеристичний многочлен

$$L(\lambda, k) \equiv \lambda^2 + A_1(k)\lambda + A_0(k) = (\lambda - \lambda_{1k})(\lambda - \lambda_{2k}) \tag{7}$$

для диференціального рівняння (5). Якщо $D(k)$ — дискримінант многочлена $L(\lambda,k)$, то $D(k) = \big[A_1(k)\big]^2 - 4A_0(k)$ і $\lambda_{1k} = \dfrac{-A_1(k) - \sqrt{D(k)}}{2}$, $\lambda_{2k} = \dfrac{-A_1(k) + \sqrt{D(k)}}{2}$.

Згідно з [6] для коренів λ_{1k} і λ_{2k} справедливими є оцінки

$$|\lambda_{1k}| \le C_1\tilde{k}^N, \quad |\lambda_{2k}| \le C_1\tilde{k}^N, \qquad C_1 = C_1(a_{j,s}). \tag{8}$$

Для побудови розв'язку рівняння (5) введемо множини $\mathcal{K}_1 = \{k \in \mathbb{Z}^p : D(k) = 0\}$, $\mathcal{K}_2 = \mathbb{Z}^p \backslash \mathcal{K}_1$. Якщо $k \in \mathcal{K}_1$, то $\lambda_{1k} = \lambda_{2k}$ і загальний розв'язок задачі (5), (6) визначається формулою

$$u_k(t) = (c_{1k} + c_{2k}t)e^{\lambda_{1k}t},$$

де коефіцієнти c_{1k}, c_{2k} задовольняють систему лінійних алгебричних рівнянь

$$\begin{cases} \big(1 - \mu_1(\tau)e^{\lambda_{1k}T}\big)c_{1k} - \mu_1(\tau)Te^{\lambda_{1k}T}c_{2k} = \varphi_{1k}, \\ \lambda_{1k}\big(1 - \mu_2(\tau)e^{\lambda_{1k}T}\big)c_{1k} + \big(1 - \mu_2(\tau)e^{\lambda_{1k}T}(1 + \lambda_{1k}T)\big)c_{2k} = \varphi_{2k}, \end{cases}$$

визначник $\Delta_k(\tau)$ якої задається рівністю

$$\Delta_k(\tau) = \big(1 - \mu_1(\tau)e^{\lambda_{1k}T}\big)\big(1 - \mu_2(\tau)e^{\lambda_{1k}T}\big) + T\big(\mu_1(\tau) - \mu_2(\tau)\big)\lambda_{1k}e^{\lambda_{1k}T}.$$

Якщо ж $k \in \mathcal{K}_2$, то розв'язок задачі (5), (6) визначається формулою

$$u_k(t) = c_{1k}e^{\lambda_{1k}t} + c_{2k}e^{\lambda_{2k}t},$$

де коефіцієнти c_{1k}, c_{2k} також задовольняють систему лінійних алгебричних рівнянь

$$\begin{cases} \big(1 - \mu_1(\tau)e^{\lambda_{1k}T}\big)c_{1k} + \big(1 - \mu_1(\tau)e^{\lambda_{2k}T}\big)c_{2k} = \varphi_{1k}, \\ \lambda_{1k}\big(1 - \mu_2(\tau)e^{\lambda_{1k}T}\big)c_{1k} + \lambda_{2k}\big(1 - \mu_2(\tau)e^{\lambda_{2k}T}\big)c_{2k} = \varphi_{2k}. \end{cases}$$

Визначник цієї системи має вигляд

$$\Delta_k(\tau) = \mu_1(\tau)\big(\lambda_{1k}e^{\lambda_{2k}T} - \lambda_{2k}e^{\lambda_{1k}T}\big) + \mu_2(\tau)\big(\lambda_{1k}e^{\lambda_{1k}T} - \lambda_{2k}e^{\lambda_{2k}T}\big) + (\lambda_{2k}-\lambda_{1k})\big(1+\mu_1(\tau)\mu_2(\tau)e^{(\lambda_{1k}+\lambda_{2k})T}\big). \tag{9}$$

Очевидно, що задача (5), (6) має єдиний розв'язок лише для тих τ, що є розв'язками нерівності $|\Delta_k(\tau)| > 0$.

Теорема 1. *Розв'язок задачі* (1), (2) *у просторі* $\boldsymbol{H}^2_{N,q}$ *єдиний для тих і лише для тих* τ, *які задовольняють умову*

$$|\Delta_k(\tau)| > 0, \qquad (\forall\, k \in \mathbb{Z}^p). \tag{10}$$

Зауважимо, що $\inf\limits_{k\in\mathbb{Z}^p}|\Delta_k(\tau)|>0$ є достатньою умовою єдиності розв'язку задачі (1), (2).

Нехай τ задовольняє умову (10), тоді існує розв'язок $u_k(t)$ задачі (5), (6) для кожного $k\in\mathbb{Z}^p$ і визначається формулами

$$u_k(t) = \frac{\big(1-\mu_2(\tau)e^{\lambda_{1k}T}(1+\lambda_{1k}T)\big)e^{\lambda_{1k}t} - \lambda_{1k}\big(1-\mu_2(\tau)e^{\lambda_{1k}T}\big)te^{\lambda_{1k}t}}{\Delta_k(\tau)}\varphi_{1k} + \frac{te^{\lambda_{1k}t} + (T-t)\mu_1(\tau)e^{\lambda_{1k}(T+t)}}{\Delta_k(\tau)}\varphi_{2k}, \qquad k\in\mathcal{K}_1, \tag{11}$$

$$u_k(t) = \frac{\lambda_{2k}e^{\lambda_{1k}t} - \lambda_{1k}e^{\lambda_{2k}t} + \mu_2(\tau)\big(\lambda_{1k}e^{\lambda_{1k}T+\lambda_{2k}t} - \lambda_{2k}e^{\lambda_{1k}t+\lambda_{2k}T}\big)}{\Delta_k(\tau)}\varphi_{1k} + \frac{e^{\lambda_{2k}t} - e^{\lambda_{1k}t} + \mu_1(\tau)\big(e^{\lambda_{1k}t+\lambda_{2k}T} - e^{\lambda_{1k}T+\lambda_{2k}t}\big)}{\Delta_k(\tau)}\varphi_{2k}, \qquad k\in\mathcal{K}_2, \tag{12}$$

Таким чином, одержуємо формальне зображення розв'язку $u(t,x)$ задачі у вигляді ряду (4), де функції $u_k(t)$ визначаються формулами (11), (12).

2 Оцінки для функції $u_k(t)$ та її похідних

Для доведення належності розв'язку u до простору $\mathbf{H}^2_{N,q}$ достатньо оцінити зверху функції $u_k(t)$, $u_k'(t)$ та $u_k''(t)$.

Запровадимо функцію Ψ_k дійсної змінної τ, $\tau\in I$, за формулою

$$\Psi_k(\tau) := \begin{cases} \Delta_k(\tau), & k\in\mathcal{K}_1,\\ \dfrac{\Delta_k(\tau)}{\lambda_{2k}-\lambda_{1k}}, & k\in\mathcal{K}_2. \end{cases} \tag{13}$$

Якщо $k\in\mathcal{K}_1$, то із (8) та (11) отримаємо оцінку

$$\tilde{k}^{-jN}\left|u_k^{(j)}(t)\right| \le \frac{C_2\max\{1, e^{2\operatorname{Re}\lambda_{1k}T}\}}{|\Psi_k(\tau)|}\Big(\tilde{k}^N|\varphi_{1k}| + |\varphi_{2k}|\Big), \quad j=0,1,2, \tag{14}$$

де $C_2 = (2\max\{\|\mu_1\|_{C(I)}, \|\mu_2\|_{C(I)}\}+1)(3+C_1T)C_1^2$.

Якщо $k\in\mathcal{K}_2$, то для $j=0,1,2$ маємо рівність

$$u_k^{(j)}(t) = \left(\frac{\partial^{j+1}r_k(t,\xi)}{\partial\xi\partial t^j}\bigg|_{\xi=0} - \mu_2(\tau)\frac{\partial^{j+1}r_k(t,\xi)}{\partial\xi\partial t^j}\bigg|_{\xi=T}\right)\frac{\varphi_{1k}}{\Psi_k(\tau)} - \left(\frac{\partial^{j}r_k(t,\xi)}{\partial t^j}\bigg|_{\xi=0} - \mu_1(\tau)\frac{\partial^{j}r_k(t,\xi)}{\partial t^j}\bigg|_{\xi=T}\right)\frac{\varphi_{2k}}{\Psi_k(\tau)}, \tag{15}$$

де $r_k(t,\xi) := \dfrac{e^{\lambda_{1k}t+\lambda_{2k}\xi} - e^{\lambda_{1k}\xi+\lambda_{2k}t}}{\lambda_{2k}-\lambda_{1k}}$, $(t,\xi)\in[0,T]^2$.

Лема 2.1. *Для комплексних чисел* λ_1 *і* λ_2, *де* $\lambda_1\ne\lambda_2$, *справедлива нерівність*

$$\left|\frac{e^{\lambda_1}-e^{\lambda_2}}{\lambda_1-\lambda_2}\right| \le 2(e^{\operatorname{Re}\lambda_1} + e^{\operatorname{Re}\lambda_2}). \tag{16}$$

Доведення. Розглянемо спочатку випадок, коли $\lambda_1,\lambda_2\in\mathbb{R}$. Не обмежуючи загальності, вважаємо, що $\lambda=\lambda_1-\lambda_2>0$. Якщо $0<\lambda<1$, то із нерівності $1\le e^\lambda\le(e-1)\lambda+1$ випливає нерівність $\frac{e^\lambda-1}{e^\lambda+1}\le\frac{(e-1)\lambda}{2}\le\lambda$, що рівносильна нерівності

$$\frac{e^{\lambda_1}-e^{\lambda_2}}{\lambda_1-\lambda_2} \le e^{\lambda_1}+e^{\lambda_2}, \quad \lambda_1,\lambda_2\in\mathbb{R},\ \lambda_1\ne\lambda_2. \tag{17}$$

Якщо ж $\lambda\ge1$, то очевидно, що нерівність (17) виконується.

У випадку $\lambda_1,\lambda_2\in\mathbb{C}$ запишемо квадрат лівої частини нерівності (16) у вигляді

$$\left|\frac{e^{\lambda_1}-e^{\lambda_2}}{\lambda_1-\lambda_2}\right|^2 = \frac{(e^{\operatorname{Re}\lambda_1}-e^{\operatorname{Re}\lambda_2})^2 + 4e^{\operatorname{Re}\lambda_1}e^{\operatorname{Re}\lambda_2}\sin^2\operatorname{Im}(\lambda_1-\lambda_2)/2}{\operatorname{Re}^2(\lambda_1-\lambda_2)+\operatorname{Im}^2(\lambda_1-\lambda_2)}.$$

Тоді із нерівностей (17) та $|\sin t|\le|t|$ отримаємо такі нерівності:

$$\left|\frac{e^{\lambda_1}-e^{\lambda_2}}{\lambda_1-\lambda_2}\right|^2 \le \left(\frac{e^{\operatorname{Re}\lambda_1}-e^{\operatorname{Re}\lambda_2}}{\operatorname{Re}\lambda_1-\operatorname{Re}\lambda_2}\right)^2 + \frac{e^{\operatorname{Re}\lambda_1}e^{\operatorname{Re}\lambda_2}\sin^2\operatorname{Im}\frac{\lambda_1-\lambda_2}{2}}{\operatorname{Im}^2\frac{\lambda_1-\lambda_2}{2}} \le$$

$$(e^{\operatorname{Re}\lambda_1}+e^{\operatorname{Re}\lambda_2})^2 + e^{\operatorname{Re}\lambda_1}e^{\operatorname{Re}\lambda_2} \le 4(e^{\operatorname{Re}\lambda_1}+e^{\operatorname{Re}\lambda_2})^2, \quad \operatorname{Re}\lambda_1\ne\operatorname{Re}\lambda_2, \quad \operatorname{Im}\lambda_1\ne\operatorname{Im}\lambda_2,$$

$$\left|\frac{e^{\lambda_1}-e^{\lambda_2}}{\lambda_1-\lambda_2}\right|^2 = \left(\frac{e^{\operatorname{Re}\lambda_1}-e^{\operatorname{Re}\lambda_2}}{\operatorname{Re}\lambda_1-\operatorname{Re}\lambda_2}\right)^2 \le \left(e^{\operatorname{Re}\lambda_1}+e^{\operatorname{Re}\lambda_2}\right)^2, \quad \operatorname{Re}\lambda_1\ne\operatorname{Re}\lambda_2, \quad \operatorname{Im}\lambda_1=\operatorname{Im}\lambda_2,$$

$$\left|\frac{e^{\lambda_1}-e^{\lambda_2}}{\lambda_1-\lambda_2}\right|^2 = \frac{e^{\operatorname{Re}\lambda_1}e^{\operatorname{Re}\lambda_2}\sin^2\operatorname{Im}\frac{\lambda_1-\lambda_2}{2}}{\operatorname{Im}^2\frac{\lambda_1-\lambda_2}{2}} \le \left(e^{\operatorname{Re}\lambda_1}+e^{\operatorname{Re}\lambda_2}\right)^2, \operatorname{Re}\lambda_1=\operatorname{Re}\lambda_2, \quad \operatorname{Im}\lambda_1\ne\operatorname{Im}\lambda_2,$$

Із отриманих нерівностей випливає нерівність (16). Лему доведено. □

Лема 2.2. *Нехай* $h_k(t,\xi) := e^{\operatorname{Re}\lambda_{1k}t+\operatorname{Re}\lambda_{2k}\xi} + e^{\operatorname{Re}\lambda_{1k}\xi+\operatorname{Re}\lambda_{2k}t}$, $(t,\xi)\in[0,T]^2$, *тоді для функції* $r_k(t,\xi)$ *виконуються оцінки*

$$\left|\frac{\partial^j r_k(t,\xi)}{\partial t^j}\right| \le C_3\tilde{k}^{jN}h_k(t,\xi), \quad \left|\frac{\partial^{j+1}r_k(t,\xi)}{\partial\xi\partial t^j}\right| \le C_3\tilde{k}^{(j+1)N}h_k(t,\xi), \quad j=0,1,2, \tag{18}$$

де $C_3 = 2(TC_1+1)(C_1+1)^2$.

Доведення. З леми 2.1 випливає, що $|r_k(t,\xi)|\le 2Th_k(t,\xi)$. Тоді на основі формул

$$\frac{\partial^j r_k(t,\xi)}{\partial t^j} = \lambda_{1k}^j r_k(t,\xi) + \frac{\lambda_{1k}^j - \lambda_{2k}^j}{\lambda_{1k}-\lambda_{2k}}e^{\lambda_{1k}\xi+\lambda_{2k}t}, \quad j=0,1,2,$$

$$\frac{\partial r_k(t,\xi)}{\partial \xi} = \lambda_{2k} r_k(t,\xi) + e^{\lambda_{1k}\xi + \lambda_{2k}t}, \quad \frac{\partial^{j+1} r_k(t,\xi)}{\partial\xi\partial t^j} = \lambda_{1k}\lambda_{2k}\frac{\partial^{j-1} r_k(t,\xi)}{\partial\xi\partial t^{j-1}}, \quad j=1,2,$$

із нерівностей (8) отримаємо оцінки

$$\left|\frac{\partial^j r_k(t,\xi)}{\partial t^j}\right| \le (2TC_1 + j)C_1^{j-1}\tilde{k}^{jN} h_k(t,\xi), \ j=0,1,2,3, \quad \left|\frac{\partial r_k(t,\xi)}{\partial\xi}\right| \le (2TC_1+1)\tilde{k}^N h_k(t,\xi),$$

$$\left|\frac{\partial^{j+1} r_k(t,\xi)}{\partial\xi\partial t^j}\right| \le (2TC_1 + j - 1)C_1^j \tilde{k}^{(j+1)N} h_k(t,\xi), \quad j=1,2,3,$$

з яких випливають нерівності (18). Лему доведено. □

З формули (15) і леми 2.2 при $k \in \mathcal{K}_2$ випливають оцінки

$$\tilde{k}^{-jN}\,|u_k^j(t)| \le C_4 \frac{h_k(t,0) + h_k(t,T)}{|\Psi_k(\tau)|}\big(\tilde{k}^N|\varphi_{1k}| + |\varphi_{2k}|\big), \quad j=0,1,2, \tag{19}$$

де $C_4 = C_3 \max\{1, ||\mu_1||_{C(I)}, ||\mu_2||_{C(I)}\}$.

Функції $|\Psi_k(\tau)|$ у нерівностях (14) і (19), які є відмінними від нуля для всіх $k \in \mathbb{Z}^p$ (за припущенням), можуть набувати як завгодно малих значень при $\tilde{k} \to \infty$, тому вони впливають на збіжність ряду, який визначає норму розв'язку задачі (1), (2) у просторі $\mathbf{H}^2_{N,q}$. Отже, існування розв'язку задачі пов'язане з проблемою малих знаменників. Для вирішення цієї проблеми застосовується метричний підхід, який дозволяє встановити такі оцінки знизу для малих знаменників:

$$|\Psi_k(\tau)| \ge \tilde{k}^{-\delta}\max\{1, e^{2\,\mathrm{Re}\,\lambda_{1k}T}\}, \quad k \in \mathcal{K}_1, \qquad |\Psi_k(\tau)| \ge \tilde{k}^{-\delta}(h_k(t,0) + h_k(t,T)), \quad k \in \mathcal{K}_2,$$

де δ – деяке дійсне число. Ці оцінки виконуються для майже всіх (стосовно міри Лебега в $\mathbb{R}$) параметрів τ із I.

3 Оцінка знизу малих знаменників задачі

Для встановлення таких оцінок використано допоміжні теореми (теореми 2, 3) про оцінки мір виняткових множин.

Теорема 2. *Нехай функція $f \in C^{(n+1)}(I;\mathbb{C})$ є такою, що $\min\limits_{\tau\in I}\max\limits_{0\le j\le n}|f^{(j)}(\tau)| \ge \delta > 0$. Тоді для довільного $\varepsilon \in (0, \delta/2)$ виконується оцінка*

$$\mathrm{meas}_{\mathbb{R}}\{\tau \in I : |f(\tau)| < \varepsilon\} \le 4\big(\sqrt{2}+1\big)\Big(\frac{M}{\delta}\,\mathrm{meas}_{\mathbb{R}}\, I + 1\Big) n \sqrt[n]{\varepsilon/\delta},$$

де $M = \max\limits_{1\le j\le n+1}||f^{(j)}||_{C(I)}$.

Твердження теореми випливає із теореми 2.5.4 роботи [5].

Теорема 3. *Нехай функція F має вигляд*

$$F(\tau, z) = f_1(\tau)z_1 + f_2(\tau)z_2 + \ldots + f_m(\tau)z_m, \quad \tau \in I, \ \ z = (z_1, \ldots, z_m) \in \mathbb{C}^m \setminus \{0\},$$

де $f_i \in C^m\big(I;\mathbb{R}\big)$, $i = 1, \ldots, m$, I — відрізок прямої $\mathbb{R}$, z – фіксований векторний параметр. Якщо вронскіан $W[f](\tau)$ системи функцій $\{f_1, \ldots, f_m\}$ відмінний від нуля на I, тобто $\min\limits_{\tau\in I}|W[f](\tau)| > 0$, то для довільного $\varepsilon \in \big(0, \frac{m_1|z|}{2}\big)$ виконується оцінка

$$\mathrm{meas}_{\mathbb{R}}\{\tau \in I : |F(\tau, z)| < \varepsilon\} \le C_5 \sqrt[m-1]{\varepsilon/|z|}, \tag{20}$$

де

$$C_5 = 4\big(\sqrt{2}+1\big)\big(m_2\,\mathrm{meas}_{\mathbb{R}}\, I/m_1 + 1\big)(m-1)m_1^{\frac{1}{(1-m)}}, \quad |z| = |z_1| + \ldots + |z_m|.$$

$$m_1 = m_1(f) = \min_{\tau\in I}\big|W[f](\tau)\big|\Big(m\sum_{i=1}^{m}\prod_{j=1, j\ne i}^{m}\|f_j\|_{C^{(m-1)}(I)}\Big)^{-1}, \quad m_2 = \max_{1\le i\le m}\max_{1\le j\le m}||f_i^{(j)}||_{C(I)},$$

Доведення. При фіксованому z застосуємо до функції $F(\tau, z)$ теорему 2. Покажемо, що $\delta = m_1|z|$. Для цього розглянемо систему лінійних алгебричних рівнянь стосовно вектора z

$$\begin{bmatrix} f_1(\tau) & f_2(\tau) & \ldots & f_m(\tau) \\ f_1'(\tau) & f_2'(\tau) & \ldots & f_m'(\tau) \\ \vdots & \vdots & \ldots & \vdots \\ f_1^{(m-1)}(\tau) & f_2^{(m-1)}(\tau) & \ldots & f_m^{(m-1)}(\tau) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \\ \vdots \\ z_m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F(\tau, z) \\ F'(\tau, z) \\ \vdots \\ F^{(m-1)}(\tau, z) \end{bmatrix}. \tag{21}$$

Визначником цієї системи є вронскіан $W[f](\tau)$, який за умовою теореми не перетворюється в нуль в жодній точці відрізка I. Тому дана система сумісна та має єдиний розв'язок, який знаходиться за формулами Крамера

$$z_i = \frac{W_i[f, F](t)}{W[f](\tau)}, \quad i = 1, \ldots, m,$$

де $W_i[f, F](\tau)$ — вронскіан системи функцій $\{f_1, \ldots, f_{i-1}, F, f_{i+1}, \ldots, f_m\}$, іншими словами, $W_i[f, F](\tau)$ — це визначник, отриманий із вронскіана $W[f](\tau)$ шляхом заміни його i-го стовпця $\mathrm{col}(f_i, f_i', \ldots, f_i^{(m-1)})$ на стовпець правої частини системи (21).

Взявши модулі обидвох частин цих рівностей та просумувавши їх по $i = 1, \ldots, m$, одержимо тотожність

$$|z| = \sum_{i=1}^{m}|z_i| = \frac{1}{|W[f](t)|}\sum_{i=1}^{m}\big|W_i[f, F](\tau)\big|. \tag{22}$$

На підставі нерівності Адамара для матриці $\mathbf{A} = [a_{ij}]_{i,j=1}^m$, де $a_{ij} \in \mathbb{C}$, отримаємо нерівність $|\det \mathbf{A}| \le \prod\limits_{j=1}^{m}\sum\limits_{i=1}^{m}|a_{ij}|$, з якої випливає оцінка

$$\big|W_i[f, F](\tau)\big| \le \sum_{j=0}^{m-1}|F^{(j)}(\tau, z)|\prod_{j=1, j\ne i}^{m}\|f_j\|_{C^{(m-1)}(I)}.$$

Тоді із тотожності (22) отримаємо нерівність

$$\max_{0\le j\le m-1}\left|F^{(j)}(\tau,z)\right| \ge \min_{\tau\in I}\left|W[f](\tau)\right|\Big(m\sum_{i=1}^{m}\prod_{j=1,j\ne i}^{m}\|f_j\|_{C^{(m-1)}}\Big)^{-1}|z| = m_1|z| = \delta.$$

Оскільки функція $F(\tau,z)$ задовольняє теорему 2 із значеннями $\delta = m_1|z|$ і

$$M = M(z) := \max_{1\le j\le m}\|F^{(j)}(\cdot,z)\|_{C(I)} \le m_2|z|, \qquad M/\delta \le m_2/m_1,$$

то для фіксованого параметра z та $\forall\,\varepsilon\in\left(0,\frac{m_1|z|}{2}\right)$ отримуємо шукану оцінку (20). $\square$

Теорема 4. *Нехай $\mu_1,\mu_2\in C^4(I)$, і нехай вронскіан системи функцій $\{1,\mu_1\mu_2,\mu_1,\mu_2\}$ відмінний від нуля на відрізку I, тобто $(\forall\tau\in I)\ W[1,\mu_1\mu_2,\mu_1,\mu_2](\tau)\ne 0$. Тоді для майже всіх (стосовно міри Лебега в просторі $\mathbb{R}$) τ із відрізка I, тобто для майже всіх (стосовно індукованої міри Лебега на K) точок кривої K нерівність*

$$|\Psi_k(\tau)| \ge \tilde{k}^{-\delta}\begin{cases}1+e^{2\operatorname{Re}\lambda_{1k}T}, & k\in\mathcal{K}_1,\\ 1+e^{\operatorname{Re}(\lambda_{1k}+\lambda_{2k})T}+|e^{\lambda_{1k}T}+e^{\lambda_{2k}T}|, & k\in\mathcal{K}_2,\end{cases} \tag{23}$$

виконується для всіх (крім скінченного числа) векторів $k\in\mathbb{Z}^p$ при $\delta>3p$.

Доведення. Введемо множини $B_k=\{\tau\in I: |\Psi_k(\tau)|<\varepsilon_k\}$, $k\in\mathbb{Z}^p$, B — множина тих точок $\tau\in I$, для яких справджується оцінка $|\Psi_k(\tau)|<\varepsilon_k$ для безлічі $k\in\mathbb{Z}^p$, де

$$\varepsilon_k = \frac{m_1\tilde{k}^{-\delta}}{3}\times\begin{cases}1+e^{2\operatorname{Re}\lambda_{1k}T}, & k\in\mathcal{K}_1,\\ 1+e^{\operatorname{Re}(\lambda_{1k}+\lambda_{2k})T}+|e^{\lambda_{1k}T}+e^{\lambda_{2k}T}|, & k\in\mathcal{K}_2,\end{cases}$$

$$m_1 = m_1(1,\mu_1\mu_2,\mu_1,\mu_2).$$

Функцію $\Psi_k(\tau)$, яка визначається формулою (13), перепишемо у вигляді

$$\Psi_k(\tau) = 1+\mu_1(\tau)\mu_2(\tau)e^{(\lambda_{1k}+\lambda_{2k})T} +$$
$$\begin{cases}\mu_1(\tau)e^{\lambda_{1k}T}(T\lambda_{1k}-1)-\mu_2(\tau)e^{\lambda_{1k}T}(T\lambda_{1k}+1), & k\in\mathcal{K}_1,\\ \mu_1(\tau)\frac{\partial r_k(t,\xi)}{\partial t}\Big|_{(t,\xi)=(0,T)}-\mu_2(\tau)\frac{\partial r_k(t,\xi)}{\partial\xi}\Big|_{(t,\xi)=(0,T)}, & k\in\mathcal{K}_2.\end{cases}$$

Функція $\Psi_k(\tau)$, як функція $F(\tau,z)$, задовольняє умови теореми 3, де $m=4$, $f_1(\tau)=1$, $f_2(\tau)=\mu_1(\tau)\mu_2(\tau)$, $f_3(\tau)=\mu_1(\tau)$, $f_4(\tau)=\mu_2(\tau)$,

$$(z_1,z_2,z_3,z_4) = \begin{cases}\left(1,e^{(\lambda_{1k}+\lambda_{2k})T},(T\lambda_{1k}-1)e^{\lambda_{1k}T},-(T\lambda_{1k}+1)e^{\lambda_{1k}T}\right), & k\in\mathcal{K}_1,\\ \left(1,e^{(\lambda_{1k}+\lambda_{2k})T},\frac{\partial r_k(t,\xi)}{\partial t}\Big|_{(t,\xi)=(0,T)},-\frac{\partial r_k(t,\xi)}{\partial\xi}\Big|_{(t,\xi)=(0,T)}\right), & k\in\mathcal{K}_2.\end{cases}$$

Оскільки виконуються нерівності

$$\varepsilon_k \le \frac{m_1\tilde{k}^{-\delta}}{2}\begin{cases}1+e^{2\operatorname{Re}\lambda_{1k}T}+e^{\operatorname{Re}\lambda_{1k}T}(|T\lambda_{1k}-1|+|T\lambda_{1k}+1|), & k\in\mathcal{K}_1,\\ 1+e^{\operatorname{Re}(\lambda_{1k}+\lambda_{2k})T}+\left(\left|\frac{\partial r_k(t,\xi)}{\partial t}\right|+\left|\frac{\partial r_k(t,\xi)}{\partial\xi}\right|\right)\Big|_{(t,\xi)=(0,T)}, & k\in\mathcal{K}_2,\end{cases}$$

то при кожному $k\in\mathbb{Z}^p$ випливають оцінки для міри множини B_k

$$\operatorname{meas}_{\mathbb{R}} B_k \le C_5\tilde{k}^{-\delta/3}.$$

Оскільки ряд $\sum_{k\in\mathbb{Z}^p}\operatorname{meas}_{\mathbb{R}}B_k$ при $\delta>3p$ мажорується збіжним рядом $C_5\sum_{k\in\mathbb{Z}^p}\tilde{k}^{-\delta/3}$, то з леми Бореля-Кантеллі випливає, що міра Лебега множини точок із I, що потрапляють у нескінченну кількість множин B_k, дорівнює нулю, тобто $\operatorname{meas}_{\mathbb{R}}B=0$. Тоді для майже всіх (стосовно міри Лебега в $\mathbb{R}$) чисел τ із відрізка I нерівність (23) виконується для всіх (крім скінченного числа) векторів k при $\delta>3p$. $\square$

4 Існування розв'язку задачі

Із формули (13) та оцінки (23) випливає, що умова (10) виконується для майже всіх τ із I, тобто для майже всіх точок кривої K.

Теорема 5. *Нехай функції μ_1 та μ_2 задовольняють умови теореми 4. Тоді, якщо $\varphi_1\in\mathbf{H}_{q+N+\delta}$ і $\varphi_2\in\mathbf{H}_{q+\delta}$, де $\delta>3p$, то для майже всіх (стосовно міри Лебега в $\mathbb{R}$) чисел τ із відрізка I існує розв'язок u задачі (1), (2) із простору $\mathbf{H}^2_{N,q}$, який зображається рядом (4) і неперервно залежить від функцій φ_1, φ_2.*

Доведення. В умовах теореми існує константа $K_\tau>0$, залежна від $\tau\in I$, така що для майже всіх $\tau\in I$ виконується нерівність (23) при $\tilde{k}>K_\tau$, причому $\min_{\tau\in I,\tilde{k}\le K_\tau}|\Psi_k(\tau)|>0$.

Тоді із нерівностей (14), (19) та нерівності

$$h_k(t,0)+h_k(t,T)\le 4\left(1+e^{\operatorname{Re}(\lambda_{1k}+\lambda_{2k})T}+|e^{\lambda_{1k}T}+e^{\lambda_{2k}T}|\right)$$

отримаємо оцінки

$$\tilde{k}^{-2jN}\left|u_k^{(j)}(t)\right|^2 \le C_6\left(\tilde{k}^{2(N+\delta)}|\varphi_{1k}|^2+\tilde{k}^{2\delta}|\varphi_{2k}|^2\right),\quad j=0,1,2, \tag{24}$$

де $C_6 = 2\max^2\left\{C_2,4C_4,C_2\cdot\max_{\tau\in I,\tilde{k}<K_\tau}\left\{\frac{1+e^{\operatorname{Re}\lambda_{1k}T}}{|\Psi_k(\tau)|}\right\},C_4\cdot\max_{\tau\in I,t\in[0,T],\tilde{k}<K_\tau}\left\{\frac{h_k(t,0)+h_k(t,T)}{|\Psi_k(\tau)|}\right\}\right\}$.

Тоді із формули для норми в просторі $\mathbf{H}^n_{N,q}$ та нерівностей (24) отримуємо оцінку для квадрата норми розв'язку $\|u\|^2_{H^2_{N,q}}\le 3C_6(\|\varphi_1\|^2_{H_{q+N+\delta}}+\|\varphi_2\|^2_{H_{q+\delta}})$, що і треба було довести. $\square$

Дослідження підтримані ДФФД України (проект №28.1/010, проект №29.1/005).

Література

1. Бобик І.О. *Крайові задачі для загальних диференціальних рівнянь з частинними похідними*: дис. ... канд. фіз.-мат. наук: 01.01.02. – Львів. – 1994. – 130 с.
2. Власій О.Д. *Задача з нелокальними умовами для рівнянь із частинними похідними зі сталими коефіцієнтами* // Мат. методи та фіз.-мех. поля. 2009. — 52, № 1. — С. 34–42.
3. Ільків В.С., Савка І.Я. *Нелокальна двоточкова задача з векторним параметром на гладкій кривій* // Тринадцята міжнар. наук. конференція ім. акад. М.Кравчука (Київ, 13–15 травня 2010), Матеріали конференції. – Т.1. – Київ, 2010. – С. 337.

4. Пташник Б.Й., Ільків В.С., Кміть І.Я., Поліщук В.М. Нелокальні крайові задачі для рівнянь із частинними похідними. – К.: Наукова думка, 2002. – 416 с.

5. Симотюк М.М. *Багатоточкові задачі для лінійних диференціальних та псевдодиференціальних рівнянь із частинними похідними*: Дис. ... канд. фіз.-мат. наук: 01.01.02. — Львів, 2005. – 193 с.

6. Фаддєєв Д.К., Сомінський І.С. Збірник задач з вищої алгебри .– Київ: Вища шк., 1971. – 316 с.

Інститут прикладних проблем механіки і математики ім. Я.С. Підстригача,
Львів, Україна

Надійшло 17.11.2010

Savka I.Ya. *Nonlocal problem with dependent coefficients in conditions for the second-order equation in time variable*, Carpathian Mathematical Publications, **2**, 2 (2010), 101–110.

In the Cartesian product of a time segment and a spatial multidimensional torus, we investigate nonlocal two-point problem with dependent coefficients on a smooth curve in conditions for typeless partial differential equation of the second order in time variable. Conditions for the one-valued solvability of the problem are established. Metric theorem on lower bound of small denominators on smooth curve are proved.

Савка И.Я. *Нелокальная задача с зависимыми коэффициентами в условиях для уравнения второго порядка по временной переменной* // Карпатские математические публикации. — 2010. — Т.2, №2. — С. 101–110.

В области, являющейся декартовым произведением часового отрезка и пространственного многомерного тора, исследована нелокальная двухточечная задача с зависимыми коэффициентами в условиях для безтипного дифференциального уравнения в частных производных второго порядка по временной переменной переменной, которые расположены на некоторой гладкой кривой. Установлены условия однозначной разрешимости задачи. Доказано метрическую теорему об оценке снизу малых знаменателей на гладкой кривой.

Карпатські математичні публікації. Т.2, №2

Carpathian Mathematical Publications. V.2, №2

УДК 515.12+512.58

Савченко О.

ПРОДОВЖЕННЯ ЧАСТКОВИХ РОЗМИТИХ МЕТРИК

Савченко О. *Продовження часткових розмитих метрик* // Карпатські математичні публікації. — 2010. — Т.2, №2. — С. 111–115.

Доведено, що існує неперервний оператор продовження стаціонарних часткових розмитих метрик. Основний результат є аналогом теореми Е. Тимчатина і М. Зарічного для розмитих метрик.

Вступ

Теорії продовження неперервних функцій і неперервних метрик певний час розвивалися паралельно. Аналогом одного з останніх результатів для неперервних функцій — теореми про існування лінійних операторів продовження функцій зі змінною областю визначення [4] — є аналогічна теорема для неперервних метрик [9].

Недавно автор одержав аналоги деяких результатів про продовження для розмитих метрик [7]. Нагадаємо, що поняття розмитого метричного простору (fuzzy metric space) тісно пов'язане з поняттям ймовірнісного метричного простору [8], яке, в свою чергу, є узагальненням поняття метричного простору. У ймовірнісних метричних просторах значення відстані є не числами, як у випадку метричних просторів, а функціями розподілу. Існує кілька версій поняття розмитого метричного простору, однією з найпоширеніших є версія запропонована в [2].

Інтерес до розмитих метричних просторів викликаний не лише їх різноманітними застосуваннями, але також і тим фактом, що структура розмитого метричного простору багатша, ніж структура метричного простору. Це може бути проілюстровано хоча б тим фактом, що існує поняття повного розмитого простору, та, на відміну від випадку метричних просторів, існують як поповнювані, так і непоповнювані розмиті метричні простори. Теорія розмитих метричних просторів розвивається у різних напрямках, і зараз розмитим метричним просторам присвячено багато літератури. Загальною проблемою є знаходження змістовних аналогів результатів метричної геометрії та топології метричних просторів у теорії розмитих метричних просторів.

2000 *Mathematics Subject Classification:* 18B30, 54B30.
Ключові слова і фрази: розмита метрика, метрика Прохорова, оператор продовження.

У цій статті ми розглядаємо задачу одночасного продовження розмитих метрик. Основний результат є аналогом теореми Тимчатина і Зарічного зі статті [9].

1 Розмиті метрики

Нагадаємо, що неперервною t-нормою називають бінарну операцію $*\colon [0,1]\times[0,1]\to[0,1]$, що задовольняє умови:

(i) $*$ — асоціативна і комутативна;

(ii) $*$ — неперервна;

(iii) $a*1=a$ для кожного $a\in[0,1]$;

(iv) $a*b\le c*d$, якщо $a\le c$ і $b\le d$, де $a,b,c,d\in[0,1]$.

Коротко кажучи, неперервна t-норма — це бінарна операція $*\colon [0,1]\times[0,1]\to[0,1]$, така що трійка $([0,1],\le,*)$ є впорядкованим абелевим топологічним моноїдом з одиницею 1. Прикладами t-норм є функції $a*b=ab$, $a*b=\min\{a,b\}$, $a*b=\max\{a+b-1,0\}$, $a,b\in[0,1]$ (остання t-норма називається t-нормою Лукасєвича).

Означення 1.1. *([2]).* Розмитим метричним простором *називають упорядковану трійку $(X,M,*)$, таку що X — непорожня множина, $*$ — неперервна t-норма і M — розмита множина на $X\times X\times(0,+\infty)$, що задовольняє умови*

(i) $M(x,y,t)>0$;

(ii) $M(x,y,t)=1$ тоді і лише тоді, коли $x=y$;

(iii) $M(x,y,t)=M(y,x,t)$;

(iv) $M(x,y,t)*M(y,z,s)\le M(x,z,t+s)$;

(v) функція $M(x,y,-)\colon(0,+\infty)\to(0,1]$ — неперервна

для всіх $x,y,z\in X$, $s,t>0$.

Функцію M називають *розмитою метрикою* на X (стосовно $*$). Нехай $x\in X$, $r\in(0,1)$ і $t>0$. Множина $B(x,r,t)=\{y\in X\mid B(x,y,t)>1-r\}$ називається *кулею радіуса r з центром у точці x, що відповідає t*. Множина всіх куль служить базою для (метризовної) топології на X (див. [2]). Надалі у розмитому метричному просторі будемо розглядати лише цю топологію. Для кожного $A\subset X$, $r\in(0,1)$, $t\in(0,\infty)$ приймемо $A^{r,t}=\cup\{B(x,r,t)\mid x\in A\}\subset X$.

Якщо функція $M(x,y,-)\colon(0,+\infty)\to(0,1]$ — стала для кожних $x,y\in X$, то таку розмиту метрику називають *стаціонарною розмитою метрикою* на X. У цьому випадку пишуть $M(x,y)$ замість $M(x,y,t)$, $B(x,r)$ замість $B(x,r,t)$ та A^r замість $A^{r,t}$.

2 Простір часткових розмитих метрик

Нехай X — метризовний простір. Через $\mathcal{SFM}$ позначаємо множину всіх розмитих метрик, означених на непорожніх компактних підмножинах множини X. Той факт, що стаціонарна розмита метрика M означена на множині A, записуємо так: $A=\mathrm{dom}(M)$ або $M\in\mathcal{SFM}(A)$.

Нагадаємо, що гіперпростір $\exp Y$ метризовного простору Y — це множина непорожніх компактних підмножин в Y; якщо топологія в Y породжується метрикою d, то топологія в $\exp Y$ породжується метрикою Гаусдорфа d_H:

$$d_H(A,B)=\inf\{r>0\mid A\subset B^r,\ B\subset A^r\}$$

(тут через C^r позначено r-окіл множини C).

Оператором продовження часткових розмитих метрик називають відображення

$$e\colon \bigcup_{A\in\exp X}\mathcal{SFM}(A)\to\mathcal{SFM}$$

таке, що виконано умову

$$e(M)|(\mathrm{dom}(M)\times\mathrm{dom}(M)\times(0,\infty))=M$$

для кожного $M\in\mathcal{SFM}$.

На множині $\mathcal{SFM}$ можна означити топологію, індуковану ототожненням кожної розмитої метрики M з її графіком $\Gamma_M=\{(x,y,M(x,y))\mid(x,y)\in X\times X\}$, який, у свою чергу, є елементом гіперпростору $\exp(X\times X\times[0,1])$.

Через $P(X)$ позначимо простір ймовірнісних мір на компактному просторі X. У статті [6] розглянуто розмитий аналог метрики Прохорова на компактному розмитому просторі $(X,M,*)$, де через $*$ позначено t-норму Лукасєвича.

Функція $\hat{M}\colon P(X)\times P(X)\times(0,\infty)\to[0,1]$ визначається формулою

$$\hat{M}(\mu,\nu,t)=1-\inf\{r\in(0,1)\mid \mu(A)\le\nu(A^{r,t})+r \text{ і } \nu(A)\le\mu(A^{r,t})+r$$
$$\text{для кожної борелівської множини } A\subset X\}.$$

Легко бачити, що для кожної стаціонарної розмитої метрики M розмита метрика $\hat{M}$ теж є стаціонарною.

Теорема 1. *Нехай X — компактний метризовний простір. Тоді існує неперервний оператор продовження часткових розмитих метрик $e\colon\bigcup_{A\in\exp X}\mathcal{SFM}(A)\to\mathcal{SFM}$.*

Доведення. Розглянемо підпростір $Y=\{(A,\mu)\in\exp(X)\times P(X)\mid A\supset\mathrm{supp}(\mu)\}\subset\exp(X)\times P(X)$ і нехай $f\colon Y\to\exp X$ — звуження проектування на перший співмножник. Відображення f має опуклі прообрази, і з загальних результатів теорії функторів у категорії компактів випливає, що f відкрите. З теореми Майкла про селекцію [5] випливає, що відображення f м'яке, тобто володіє властивістю продовження параметризованих часткових селекцій [1]. Зокрема, відображення $\varphi\colon Z \to Y$, де $Z = \{(A, x) \mid x \in A\} \subset \exp X \times X$, визначене формулою $\varphi(A, x) = (A, \delta_x)$, має продовження $\Phi\colon \exp X \times X \to Y$ таке, що $f\Phi = \mathrm{pr}_1\colon \exp X \times X \to \exp X$ (проекція на першу координату).

Визначимо тепер оператор e' формулою

$$e'(M)(x, y) = \hat{M}(\Phi(\mathrm{dom}(M), x), \Phi(\mathrm{dom}(M), y)),$$

де $M \in \bigcup_{A \in \exp X} \mathcal{SFM}(A)$, $x, y \in X$.

Взагалі кажучи, $e'(M)$ може бути стаціонарною розмитою псевдометрикою на X, тобто рівність $e'(M)(x, y) = 1$ не гарантує, що $x = y$. Міркуючи, як і в доведенні основного результату з статті [9], можемо знайти зліченну сім'ю відображень $\{\Phi_i\colon \exp X \times X \to Y \mid i \in \mathbb{N}\}$ таку, що для кожних $M \in \bigcup_{A \in \exp X} \mathcal{SFM}(A)$ і кожних $x, y \in X$ існує таке $i \in \mathbb{N}$, що $\hat{M}(\Phi_i(\mathrm{dom}(M), x), \Phi_i(\mathrm{dom}(M), y)) < 1$. Тепер визначимо

$$e(M)(x, y) = \min_{i \in \mathbb{N}} \left\{ \left\{ \max\{\hat{M}(\Phi(\mathrm{dom}(M), x), \Phi(\mathrm{dom}(M), y)), 1 - \frac{1}{i} \right\} \right\}.$$

Зі сказаного вище, а також результатів статті [7] про розмиті метрики на зліченних степенях випливає, що e — оператор продовження часткових розмитих метрик.

Перевірка неперервності одержаного оператора відбувається аналогічно, як і у статті [9]. $\square$

Аналогічну задачу можна сформулювати і для нестаціонарних розмитих метрик. Основна трудність, яка при цьому виникає, полягає в тому, що області визначення таких метрик будуть некомпактними. Відповідний результат про продовження неперервних функцій з некомпактними областями визначення отримано в [3].

Література

1. Щепин Е.В. *Функторы и несчетные степени компактов* // Успехи мат. наук. – 1981. – Т. 36, вып. 3. – С. 3–62.

2. George A., Veeramani P.V. *On some results in fuzzy metric spaces*, Fuzzy Sets and Systems, **64** (1994), 395–399.

3. Koyama A., Stasyuk I., Tymchatyn E.D., Zagorodnyuk A. *Continuous linear extension of functions*, Proc. Amer. Math. Soc., **138** (2010), 4149–4155.

4. Künzi H.P., Shapiro L.B. *On simultaneous extension of continuous partial functions*, Proc. Amer. Math. Soc., **125** (1997), 1853–1859.

5. Michael E. *Selected selection theorems*, Amer. Math. Monthly, **63** (1956), 233–238.

6. Repovš D., Savchenko A., Zarichnyi M., *Fuzzy Prokhorov metric on the set of probability measures* (submitted)

7. Savchenko O. *Extension of fuzzy metrics: zero-dimensional case* // Вісн. Львів. ун-ту. Серія механіко-математична. – Вип. 71, 2009. – С. 204–212.

8. Schweizer B., Sklar A. Probabilistic Metric Spaces, Elsevier Science Publishing Company, 1983.

9. Tymchatyn E.D., Zarichnyi M., *On simultaneous linear extensions of partial (pseudo)metrics*, Proc. Amer. Math. Soc., **132** (2004), no. 9, 2799–2807.

Херсонський аграрний університет,
Херсон, Україна

Надійшло 13.10.2010

Savchenko A. *Extensions of partial fuzzy metrics*, Carpathian Mathematical Publications, **2**, 2 (2010), 111–115.

It is proved that there exists a continuous extension operator for stationary partial fuzzy metrics. The main result is a counterpart of a theorem of E. Tymchatyn and M. Zarichnyi for fuzzy metrics.

Савченко А. *Продолжения частичных нечетких метрик* // Карпатские математические публикации. — 2010. — Т.2, №2. — С. 111–115.

Доказано, что существует непрерывный оператор продолжения стационарных частичных нечетких метрик. Основной результат является аналогом теоремы Э. Тимчатина и М. Заричного для нечетких метрик.

Карпатські математичні публікації. Т.2, №2

Carpathian Mathematical Publications. V.2, №2

УДК 517.9(076)

Собкович Р.І., Казмерчук А.І.

РОЗВ'ЯЗНІСТЬ БАГАТОТОЧКОВИХ КРАЙОВИХ ЗАДАЧ З ПАРАМЕТРОМ ДЛЯ СИСТЕМИ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНИХ РІВНЯНЬ

Собкович Р.І., Казмерчук А.І. *Розв'язність багатоточкових крайових задач з параметром для системи диференціальних рівнянь* // Карпатські математичні публікації. — 2010. — Т.2, №2. — С. 116–122.

Розглянуто багатоточкові крайові задачі для нелінійних систем диференціальних рівнянь з параметром. Доведено теореми існування та єдиності.

Розглянемо систему диференціальних рівнянь

$$x^{(n)} = f(t, x, x', \dots, x^{(n-1)}, \lambda) + A\lambda, \tag{1}$$

де $x = (x_1, x_2, \dots, x_m)^T$, $f = (f_1, f_2, \dots, f_m)^T$ і параметр $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m)^T$ — вектори m-вимірного евклідового простору E^m, A — невироджена матриця, та поставимо задачу відшукання її розв'язків, які задовольняють умови

$$x(t_i) = x_i^0, \qquad i = 1, 2, \dots, n+1; \qquad 0 \le t_1 < t_2 < \dots < t_{n+1} \le h. \tag{2}$$

Оскільки кількість умов, які повинен задовольняти розв'язок, більша від порядку системи, то задача (1), (2), взагалі кажучи, розв'язків може не мати. Досягти виконання всіх умов (2) можна за рахунок вдалого вибору параметра λ, який у цьому випадку виступає у ролі керування. Фактично задача, яку ми досліджуємо, є різновидністю добре відомої із якісної теорії диференціальних рівнянь задачі Валле-Пуссена. На відміну від різних методів її дослідження, розглянутих авторами ряду статей (див., наприклад, [1, 3]), де задача (1), (2) розглядалася для рівнянь першого порядку, ми пропонуємо новий підхід, який ґрунтується на відшуканні розв'язків на множині функцій, що задовольняють умови (2). Його застосування дозволило сформулювати та довести нові теореми існування та єдиності розв'язків задачі (1), (2), обґрунтувати існування ширших, у порівнянні із наведеними у вказаних вище роботах, класів функцій, для яких досліджувана задача має розв'язок, а також отримати конструктивні алгоритми для їх відшукання.

Нехай функція $f(t, y_0, y_1, \dots, y_{n-1}, y_n)$ визначена та неперервна в області $D = [0; h] \times I_0 \times I_1 \times \dots \times I_n$, $I_s = [a_s; b_s]$, $s = 0, 1, \dots, n$.

2000 *Mathematics Subject Classification:* 34A34.
Ключові слова і фрази: система диференціальних рівнянь, n-точкова проблема.

Означення. *Пару $\{x_*(t), \lambda_*\}$ будемо називати розв'язком задачі (1),(2), якщо функція $x_*(t)$ — n разів диференційовна на відрізку $[0; h]$, $x_*(t) \in I_0$, $x_*^{(s)}(t) \in I_s$, $s = 1, 2, \dots, n-1$, $\lambda_* \in [a_n, b_n]$, тотожно справджується рівність*

$$x_*^{(n)}(t) = f(t, x_*(t), x_*'(t), \dots, x_*^{(n-1)}(t), \lambda_*) + A\lambda_*,$$

а також виконуються умови $x_*(t_i) = x_i^0$.

Користуючись методикою, запропонованою у роботі [2], побудуємо інтегральний оператор $L[f(t, x, x', \dots, x^{(n-1)}, \lambda)]$ таким чином, щоб всі розв'язки системи $x = L[f]$ (якщо вони існують) задовольняли умовам (2). Шукатимемо L у вигляді

$$L[f] = \sum_{i=1}^{n+1} a_i(t) \cdot \left(\int_{t_i}^{t} \beta_i(s) \cdot f(s, x(s), x'(s), \dots, x^{(n-1)}(s), \lambda) ds + x_i^0 \right), \tag{3}$$

вимагаючи при цьому, щоб функції $\alpha_i(t)$ задовольняли умови

$$\alpha_i(t_j) = \begin{cases} 0, & j \ne i, \\ 1, & j = i, \end{cases} \qquad i = 1, 2, \dots, n+1. \tag{4}$$

Диференціюючи рівність $x = L[f]$, отримуємо співвідношення

$$x' = \sum_{i=1}^{n+1} \alpha_i'(t) \cdot \left(\int_{t_i}^{t} \beta_i(s) \cdot f(s, x(s), x'(s), \dots, x^{(n-1)}(x), \lambda) ds + x_i^0 \right) +$$

$$f(s, x, x', \dots, x^{(n-1)}, \lambda) \cdot \sum_{i=1}^{n+1} a_i(t) \cdot \beta_i(t)).$$

Нехай функції $\alpha_i(t)$ та $\beta_i(t)$ задовольняють рівність

$$\sum_{i=1}^{n+1} \alpha_i(t) \cdot \beta_i(t) = 0. \tag{5}$$

Продовжуючи процес диференціювання та накладаючи на функції $\alpha_i(t)$, $\beta_i(t)$ обмеження, тобто

$$\sum_{i=1}^{n+1} \alpha_i^{(s)}(t) \cdot \beta_i(t) = 0, \qquad s = 1, 2, \dots, n-1, \tag{6}$$

на n-му кроці отримаємо рівняння

$$x^{(n)} = \sum_{i=1}^{n+1} \alpha_i^{(n)}(t) \cdot \left(\int_{t_i}^{t} \beta_i(s) \cdot f(s, \dots) ds + x_i^0 \right) + f(s, x, x', \dots, x^{(n-1)}, \lambda) \cdot \sum_{i=1}^{n+1} a_i^{(n-1)}(t) \cdot \beta_i(t)).$$

Нехай виконуються умови

$$\alpha_i^{(n+1)}(t) = 0; \ i = 1, 2, \dots, n+1; \tag{7}$$

$$\sum_{i=1}^{n+1} \alpha_i^{(n-1)}(t) \cdot \beta_i(t) = 1. \qquad (8)$$

Для відшукання функцій $\alpha_i(t)$, $\beta_i(t)$ дістаємо систему рівнянь (4)–(8), розв'язуючи яку, знаходимо

$$\alpha_i(t) = \frac{P_i(t)}{P_i(t_i)}, \qquad P_i(t) = \prod_{j=1;j\neq i}^{n+1} (t-t_j), \qquad \beta_i(t) = \frac{(t_i-t)^{n-1}}{(n-1)!}, \qquad i=1,2,\ldots,n+1.$$

Таким чином,

$$L[f] = \sum_{i=1}^{n+1} \frac{P_i(t)}{P_i(t_i)} \left(\int_{t_i}^{t} \frac{(t_i-s)^{n-1}}{(n-1)!} \cdot f(s, x(s), x'(s), \ldots, x^{(n-1)}(s), \lambda) ds + x_i^0 \right).$$

Зауважимо, що побудований таким чином оператор L довільну неперервну на проміжку $[t_1; t_{n+1}]$ функцію $g(t)$ відображає у n разів диференційовну на цьому проміжку функцію $p(t) = L[g(t)]$, яка задовольняє умови $p(t_i) = x_i^0$, $i=1,2,\ldots,n+1$. Серед інших властивостей оператора L відзначимо, що $L[f+c] = L[f]$ для довільної векторної сталої c. Справді,

$$L[f+c] = L[f] + (-1)^{n+1} \cdot c \cdot \sum_{i=1}^{n+1} \frac{P_i(t)}{P_i(t_i)} \cdot \frac{(t_i-t)^n}{n!} = L[f] + \frac{c}{n!} \cdot \prod_{i=1}^{n+1}(t-t_i) \cdot \sum_{i=1}^{n+1} \frac{(t-t_i)^{n-1}}{P_i(t_i)} = L[f],$$

оскільки $\sum\limits_{i=1}^{n+1} \frac{(t-t_i)^{n-1}}{P_i(t_i)} = 0$. Диференціюючи n разів рівність

$$x = L[f(t, x, x', \ldots, x^{(n-1)}, \lambda)], \qquad (9)$$

отримуємо

$$x^{(n)} = \sum_{i=1}^{n+1} \frac{n!}{P_i(t_i)} \cdot \left(\int_{t_i}^{t} \frac{(t_i-s)^{n-1}}{(n-1)!} \cdot f(s, \ldots) ds + x_i^0 \right) + f(s, x, x', \ldots, x^{(n-1)}, \lambda). \qquad (10)$$

Оскільки

$$\sum_{i=1}^{n+1} \frac{1}{P_i(t_i)} \cdot \left(\int_{t_i}^{t} (t_i-s)^{n-1} f(s, \ldots) ds \right)' = f(t, \ldots) \cdot \sum_{i=1}^{n+1} \frac{(t_i-t)^{n-1}}{P_i(t_i)} = 0,$$

то продиференційований вираз є константою. Покладемо

$$A\lambda = \sum_{i=1}^{n+1} \frac{n!}{P_i(t_i)} \left(\int_{t_i}^{t} \frac{(t_i-s)^{n-1}}{(n-1)!} \cdot f(s, \ldots) ds + x_i^0 \right). \qquad (11)$$

Тепер очевидно, що коли пара $\{x_*(t), \lambda_*\}$ задовольняє систему (9), (11), то вона буде також розв'язком задачі (1), (2). Справді, для довільного розв'язку $x_*(t)$ рівняння $x = L[f]$, як випливає із (10) та (11), маємо $x_*^{(n)} = L^{(n)}[f] = f + A\lambda$. Крім цього, $x_*(t_i) = L[f(t, ..)]|_{t=t_i} = x_i^0$ $i=1,2,\ldots,n+1$.

Приступимо до встановлення умов існування розв'язків задачі (9), (11). У просторі векторів $v = \begin{pmatrix} u_0 \\ u_1 \\ \cdots \\ u_{n-1} \\ u_n \end{pmatrix} \in E^{m(n+1)}$ введемо в розгляд оператор P, означивши його рівністю

$$P(v) = \begin{pmatrix} L[f(t, u_0, u_1, \ldots, u_{n-1}, u_n)] \\ \sum\limits_{i=1}^{n+1} \frac{P_i'(t)}{P_i(t_i)} \cdot \left(\int\limits_{t_i}^{t} \frac{(t_i-s)^{n-1}}{(n-1)!} \cdot f(s, u_0(s), \ldots, u_{n-1}(s), u_n) ds + x_i^0 \right) \\ \cdots\cdots\cdots \\ \sum\limits_{i=1}^{n+1} \frac{P_i^{(n-1)}(t)}{P_i(t_i)} \cdot \left(\int\limits_{t_i}^{t} \frac{(t_i-s)^{n-1}}{(n-1)!} \cdot f(s, u_0(s), \ldots, u_{n-1}(s), u_n) ds + x_i^0 \right) \\ A^{-1} \cdot \sum\limits_{i=1}^{n+1} \frac{n!}{P_i(t_i)} \cdot \left(\int\limits_{t_i}^{t} \frac{(t_i-s)^{n-1}}{(n-1)!} \cdot f(s, u_0(s), \ldots, u_{n-1}(s), u_n) ds + x_i^0 \right) \end{pmatrix},$$

де $u_0(t) = x(t)$, $u_1(t) = x'(t)$, $\ldots$, $u_{n-1}(t) = x^{(n-1)}(t)$, $u_n = \lambda$. Із неперервності функції $f(t, y_0, y_1, \ldots, y_{n-1}, y_n)$ випливає існування таких векторних констант $\underline{M}$ та $\overline{M}$, що для всіх точок області D виконується нерівність

$$\underline{M} \leq f(t, y_0, \ldots, y_n) \leq \overline{M} \qquad (12)$$

(тут і далі нерівності між векторами та матрицями розуміємо покомпонентно).

Нехай S — множина векторів $v \in E^{m(n+1)}$, координати яких задовольняють умови

$$a_s + \frac{h_s}{n!} \cdot \frac{\overline{M} - \underline{M}}{2} + p_s \leq u_s \leq b_s - \frac{h_s}{n!} \cdot \frac{\overline{M} - \underline{M}}{2} - p_s, \qquad s = 0, 1, \ldots, n-1,$$

$$a_n + |A^{-1}| \cdot \left(\frac{\overline{M} - \underline{M}}{2} + n! \cdot \left| \sum_{i=1}^{n+1} \frac{x_i}{P_i(t_i)} \right| \right) \leq \lambda \leq b_n - |A^{-1}| \cdot \left(\frac{\overline{M} - \underline{M}}{2} + n! \cdot \left| \sum_{i=1}^{n+1} \frac{x_i}{P_i(t_i)} \right| \right),$$

де $h_s = \sum\limits_{i=1}^{n+1} \left| \frac{P_i^{(s)}(t)}{P_i(t_i)} \cdot (t-t_i)^{n+1} \right|_c$ $p_s = \left| p^{(s)}(t, x-1, \ldots, x_{n+1}) \right|_c$, $p(t, x_1, \ldots, x_{n+1}) = L[0]$, $(|\cdot|_c = max_{t\in[o;h]}|\cdot|)$, а також нехай $\tilde{v} = \begin{pmatrix} \tilde{u}_0 \\ \tilde{u}_1 \\ \cdots \\ \tilde{u}_{n-1} \\ \tilde{u}_n \end{pmatrix} \in S$. Можна переконатись у тому, що виконуються співвідношення

$$\begin{pmatrix} a_0 + \frac{h_0}{n!} \cdot \frac{\overline{M} - \underline{M}}{2} + p_0 \\ a_1 + \frac{h_1}{n!} \cdot \frac{\overline{M} - \underline{M}}{2} + p_1 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{n-1} + \frac{h_{n-1}}{n!} \cdot \frac{\overline{M} - \underline{M}}{2} + p_{n-1} \\ a_n + |A|^{-1} \cdot \left(\frac{\overline{M} - \underline{M}}{2} + n! \left| \sum\limits_{i=1}^{n+1} \frac{x_i}{P_i(t_i)} \right| \right) \end{pmatrix} \le P(\tilde{v}) \le$$

$$\begin{pmatrix} b_0 - \frac{h_0}{n!} \cdot \frac{\overline{M} - \underline{M}}{2} - p_0 \\ b_1 - \frac{h_1}{n!} \cdot \frac{\overline{M} - \underline{M}}{2} - p_1 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ b_{n-1} - \frac{h_{n-1}}{n!} \cdot \frac{\overline{M} - \underline{M}}{2} - p_{n-1} \\ b_n - |A|^{-1} \cdot \left(\frac{\overline{M} - \underline{M}}{2} + n! \left| \sum\limits_{i=1}^{n+1} \frac{x_i}{P_i(t_i)} \right| \right) \end{pmatrix}. \tag{13}$$

Ми не будемо зупинятися на детальному обґрунтуванні даних нерівностей, а лише зауважимо, що при їх доведенні рівняння (9) доцільно, враховуючи доведену вище властивість оператора L, зобразити у вигляді $x = L[f(t, x, x', \dots, \lambda) - \frac{\overline{M} + \underline{M}}{2}]$, оскільки у цьому випадку підінтегральна функція задовольнятиме умову $\left| f(t, \dots) - \frac{\overline{M} + \underline{M}}{2} \right| \le \frac{\overline{M} - \underline{M}}{2}$. Зауважимо, що дана оцінка краща від традиційних (у випадках оцінок виду $|f(t, \dots)| \le M$).

Із системи нерівностей (13) випливає, що $P(\tilde{v}) \in S$. Оскільки оператор P переводить множину S у себе і є цілком неперервним (це випливає із неперервності функції f), то в S існує хоча б один розв'язок операторного рівняння

$$v = P(v). \tag{14}$$

Таким чином, справедливим буде наступне твердження.

Теорема 1. *Нехай функція $f(t, x, x', \dots, x^{(n-1)}, \lambda)$ — визначена та неперервна в області D, виконується нерівність (12), а також множина S — непорожня. Тоді задача (1), (2) має в S хоча б один розв'язок.*

Дослідимо умови, при яких розв'язок — єдиний. При цьому будемо вважати, що в області D функція $f(t, y_0, y_1, \dots, y_n)$ задовольняє умови Ліпшиця за змінними $y_0, y_1, \dots, y_n$ з матрицями K_s, $s = 0, 1, \dots, n$, відповідно, тобто для довільних двох точок $(t, y_0, y_1, \dots, y_n)$, $(t, \tilde{y}_0, \tilde{y}_1, \dots, \tilde{y}_n) \in D$ виконується нерівність

$$|f(t, y_0, y_1, \dots, y_n) - f(t, \tilde{y}_0, \tilde{y}_1, \dots, \tilde{y}_n)| \le \sum_{i=0}^{n} K_i \cdot |y_i - \tilde{y}_i|. \tag{15}$$

Розглянемо ітераційний процес

$$v_{k+1}(t) = P v_k(t), \quad k = 0, 1, 2, \dots, \tag{16}$$

вибравши початкове наближення у вигляді $v_0(t) = \begin{pmatrix} p(t, x_1, \dots, x_n) \\ p'(t, x_1, \dots, x_n) \\ \dots\dots\dots\dots \\ p^{n-1}(t, x_1, \dots, x_n) \\ n! \cdot A^{-1} \cdot \sum\limits_{i=1}^{n+1} \frac{x_i}{P_i(t_i)} \end{pmatrix}$. Враховуючи умову (15), знаходимо

$$|v_{k+1} - v_k| = |Pv_k - Pv_{k-1}| \le$$

$$\begin{pmatrix} \left| L\left[|f(t, u_{0_k}, u_{1_k}, \dots, u_{n_k}) - f(t, u_{0_{k-1}}, u_{1_{k-1}}, \dots, u_{n_{k-1}})| \right] \right| \\ \sum\limits_{i=1}^{n+1} \left| \frac{P_i'(t)}{P_i(t_i)} \right| \left| \int\limits_{t_i}^{t} \frac{|t_i - s|^{n-1}}{(n-1)!} \parallel f(t, u_{0_k}, u_{1_k}, \dots, u_{n_k}) - f(t, u_{0_{k-1}}, u_{1_{k-1}}, \dots, u_{n_{k-1}}) \parallel ds \right| \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ |A^{-1}| \cdot \sum\limits_{i=1}^{n+1} \frac{n}{|P_i(t_i)|} \cdot \left| \int\limits_{t_i}^{t} |t_i - s|^{n-1} \cdot |f(t, u_{0_k}, \dots, u_{n_k}) - f(t, u_{0_{k-1}}, \dots, u_{n_{k-1}})| ds \right| \end{pmatrix} \le$$

$$\begin{pmatrix} h_0 \cdot \sum\limits_{i=0}^{n} K_i |u_{i_k} - u_{i_{k-1}}|_c \\ h_1 \cdot \sum\limits_{i=0}^{n} K_i |u_{i_k} - u_{i_{k-1}}|_c \\ |A^{-1}| \cdot \sum\limits_{i=0}^{n} K_i |u_{i_k} - u_{i_{k-1}}|_c \end{pmatrix}.$$

Із останньої векторної нерівності отримуємо рекурентне співвідношення

$$|r_{k+1}(t)|_c \le Q |r_k(t)|_c, \tag{17}$$

де $Q = h_0 K_0 + h_1 K_1 + \ldots + h_n K_n$, $\quad r_k(t) = \sum\limits_{i=0}^{n} K_i |u_{i_k} - u_{i_{nk-1}}|$, $\quad k = 1, 2, \dots$. Ітеруючи нерівність (17), дістаємо $|r_{k+1}(t)|_c \le Q^k |r_1(t)|_c$. Такі міркування дозволяють сформулювати наступне твердження.

Теорема 2. *Нехай виконуються умови теореми 1, нерівність (1), а також всі власні значення матриці Q лежать в одиничному крузі. Тоді задача (1), (2) має єдиний розв'язок $\{x_*(t), \lambda_*\}$, до якого при $k \to \infty$ рівномірно по $t \in [t_1; t_{n+1}]$ збігається послідовність векторних функцій (13). Похибка характеризується при цьому векторною нерівністю*

$$\begin{pmatrix} |x_k(t) - x_*(t)| \\ |x_k'(t) - x_*'(t)| \\ \dots\dots\dots\dots \\ |x_k^{(n-1)}(t) - x_*^{(n-1)}(t)| \\ |\lambda_k - \lambda_*| \end{pmatrix} \le Q^k (E - Q)^{-1} |u_1(t) - u_0(t)|_c, \tag{18}$$

де E — одинична матриця, $k = 1, 2, \dots$.

Доведення. Оскільки всі власні значення матриці Q лежать в одиничному крузі, то

$$\sum_{i=0}^{l-1} Q^{k+i} \le Q^k \cdot \sum_{i=0}^{\infty} Q^i = Q^k \cdot (E - Q)^{-1}, \quad \lim_{k \to \infty} Q^k = 0.$$

Тому

$$|r_{l+k}(t) - r_k(t)|_c \leq \sum_{i=0}^{l-1} Q^{k+i} \cdot |r_1(t) - r_0(t)|_c \leq Q^k \cdot (E - Q)^{-1} \cdot |r_1(t) - r_0(t)|_c. \qquad (19)$$

Звідси випливає рівномірна по $t \in [t_1; t_{n+1}]$ збіжність послідовностей $\{u_{i_k}(t)\}$, $i = 0, 1, \dots, n-1$, $\lim\limits_{k\to\infty} u_{i_k}(t) = u_{i_*}$, $u_{o_*}(t) = x_*(t)$, $u_{n_*} = \lambda_*$. Те, що послідовні наближення $u_{i_k}(t)$ належать області D, випливає із структури множини S. Очевидно, що функція $x_*(t)$ задовольняє умови (2), оскільки ці умови задовольняють всі наближення $x_k(t)$. Оцінки похибок (18) випливають із (19) за рахунок граничного переходу при $l \to \infty$. Єдиність розв'язку $\{x_*(t), \lambda_*\}$ обґрунтовується методом від супротивного. Теорема доведена. □

Література

1. Сеидов З.Б. *Краевые задачи с параметром для дифференциальных уравнений в банаховом пространстве* // Сиб. мат. жур. – 1968. – Т.9, №1. – С. 223–230.
2. Собкович Р.І., Гургула С.І. *Про існування та єдиність розв'язків триточкової задачі з параметром* // Наук. вісті Інст. менеджменту та економіки "Галицька академія". – 2009. – №16(2). – С.128–132.
3. Курпель Н.С., Марусяк А.Г. *Об одной многоточечной краевой задаче для дифференциальных уравнений с параметрами* // УМЖ. – 1980. – Т.32, №2. – С. 223–226.

Прикарпатський національний університет ім. В. Стефаника,
Івано-Франківськ, Україна

Надійшло 08.09.2010

Sobkovich R.I., Kazmerchuk A.I. *Solvability of n-point problems with parameter for system of differential equation*, Carpathian Mathematical Publications, **2**, 2 (2010), 116–122.

The n-point problems for non-linear systems of differential equation is investigated. Existence and uniqueness theorems are proved.

Собкович Р. И., Казмерчук А.И. *Разрешимость многоточечных краевых задач с параметром для системы дифференциальных уравнений* // Карпатские математические публикации. — 2010. — Т.2, №2. — С. 116–122.

Рассмотрены многоточечные задачи для нелинейных систем дифференциальных уравнений с параметром. Доказаны теоремы существования и единственности.

Карпатські математичні публікації. Т.2, №2

Carpathian Mathematical Publications. V.2, №2

УДК 517.98

Шарин С.В.

ПОЛІНОМІАЛЬНІ ПОВІЛЬНО ЗРОСТАЮЧІ РОЗПОДІЛИ

Шарин С.В. *Поліноміальні повільно зростаючі розподіли* // Карпатські математичні публікації. — 2010. — Т.2, №2. — С. 123–132.

У роботі побудовано поліноміальний (нелінійний) аналог повільно зростаючих розподілів Шварца. Розглянуто узагальнену операцію диференціювання у просторі поліноміальних узагальнених функцій, а також перетворення Фур'є-Лапласа таких розподілів. Наведено приклади.

Вступ

Узагальнені функції Шварца давно стали класичним інструментом математичної фізики. Проте ряд задач, наприклад, квантової теорії поля (див. [4]), вимагають поліноміального (нелінійного) узагальнення поняття узагальненої функції. У роботах [11, 12] побудовано поліноміальні ультрарозподіли та розглянуто поліноміальне узагальнення операції крос-кореляції і перетворення Лапласа. У цій статті ми вводимо клас $\mathsf{P}'(\mathcal{S}'_+)$ поліноміальних повільно зростаючих узагальнених функцій, що є узагальненням простору $\mathcal{S}'_+$ класичних розподілів Шварца. При цьому простір $\mathsf{P}'(\mathcal{S}'_+)$ з точністю до ізоморфізму асоціюється із згортковою алгеброю коефіцієнтів $\prod^{\times}_{n\in\mathbb{Z}_+} \otimes^n_{s,\mathfrak{p}} \mathcal{S}'_+$, що дозволяє ввести на $\mathsf{P}'(\mathcal{S}'_+)$ структуру алгебри.

Зауважимо, що є інші широко відомі нескінченновимірні узагальнення класичних просторів розподілів, які використовують методи гауссівського аналізу білого шуму і концепцію трійок Гельфанда [7, 9, 10].

1 Попередні відомості і означення

Нехай X, Y — локально опуклі комплексні векторні простори. Позначимо $\mathscr{L}(X, Y)$ простір всіх неперервних лінійних операторів з топологією рівномірної збіжності на обмежених множинах в X. Для простоти писатимемо $\mathscr{L}(X)$ замість $\mathscr{L}(X, X)$. Сильно

2000 *Mathematics Subject Classification:* 46G20, 46F25.
Ключові слова і фрази: поліноми на нескінченновимірних просторах, ядерні (F) та (DF) простори, повільно зростаючі узагальнені функції.

спряжений простір до X ми будемо позначати X'. Дію функціоналу $f \in X'$ на елемент $x \in X$ ми будемо записувати $\langle f \mid x \rangle$.

Для довільного $n \in \mathbb{N}$ позначимо $\mathscr{L}(^n X, \mathbb{C}) := \mathscr{L}(X \times \ldots \times X, \mathbb{C})$ простір всіх неперервних n-лінійних функціоналів. Функціонал $F \in \mathscr{L}(^n X, \mathbb{C})$ називається симетричним, якщо $F(x_1, \ldots, x_n) = F(x_{\sigma(1)}, \ldots, x_{\sigma(n)})$, де σ — довільна перестановка множини $\{1, \ldots, n\}$. Простір всіх симетричних n-лінійних неперервних функціоналів позначимо $\mathscr{L}_s(^n X, \mathbb{C})$. Визначимо так зване *діагональне відображення* як природне вкладення $\Delta_n : X \ni x \longmapsto (x, \ldots, x) \in X \times \ldots \times X$. Відображення P називається *неперервним n-однорідним поліномом*, якщо знайдеться $F \in \mathscr{L}(^n X, \mathbb{C})$ таке, що $P(x) = F(\Delta_n(x))$. Простір усіх неперервних n-однорідних поліномів позначимо $\mathsf{P}_n(X)$ і наділимо його топологією рівномірної збіжності на обмежених множинах в X. За означенням приймемо $\mathsf{P}_0(X) = \mathbb{C}$. Для детальнішого ознайомлення з основами теорії поліномів на нескінченновимірних просторах ми рекомендуємо книгу [5].

Для n-го (симетричного) тензорного степеня простору X будемо використовувати позначення $\otimes^n X$ (відповідно $\otimes^n_s X$). Поповнення тензорного добутку $\otimes$ (симетричного тензорного добутку $\otimes_s$) в проективній локально опуклій топології позначатимемо $\otimes_{\mathrm{p}}$ (відповідно $\otimes_{s,\mathrm{p}}$).

Для означення простору $\mathsf{P}_n(X)$ можна використати лінійні топологічні ізоморфізми $\mathsf{P}_n(X) \simeq \mathscr{L}_s(^n X, \mathbb{C}) \simeq \left(\otimes^n_{s,\mathrm{p}} X\right)'$, описані у книзі [5]. Якщо розглянути природне вкладення

$$\otimes_n \colon X \times \ldots \times X \ni (x_1, \ldots, x_n) \longmapsto x_1 \otimes \ldots \otimes x_n \in \otimes^n_{\mathrm{p}} X,$$

то ізоморфізм $(\otimes^n_{s,\mathrm{p}} X)' \ni p_n \longmapsto P_n := p_n \circ \otimes_n \circ \Delta_n \in \mathsf{P}_n(X)$ однозначно визначає n-однорідний поліном як композицію

$$P_n(x) = \langle p_n \mid \otimes^n x \rangle, \quad \text{де} \quad \otimes^n x := x \otimes \cdots \otimes x = (\otimes_n \circ \Delta_n) x, \qquad x \in X. \tag{1}$$

Простір всіх скінченних сум $\mathsf{P}(X) = \left\{ P = \sum\limits_{n=0}^{m} P_n : P_n \in \mathsf{P}_n(X),\, m \in \mathbb{N} \right\}$, наділений топологією рівномірної збіжності на обмежених множинах в X, називається *простором неперервних поліномів на X*. Простір $\mathsf{P}(X)$ є топологічною алгеброю з одиницею і множенням $P(x) \cdot Q(x) = \sum\limits_{n \in \mathbb{Z}_+} \sum\limits_{m=0}^{n} P_m(x) \cdot Q_{n-m}(x)$.

Символами $\mathsf{P}'(X)$, $\mathsf{P}'_n(X)$ ми будемо позначати сильно спряжені простори до $\mathsf{P}(X)$, $\mathsf{P}_n(X)$ відповідно. Аналогічні простори поліномів $\mathsf{P}(X')$, $\mathsf{P}_n(X')$ і сильно спряжених до них просторів $\mathsf{P}'(X')$, $\mathsf{P}'_n(X')$ ми вважаємо визначеними для простору X'.

Всюди в роботі символом $\prod\limits_{n \in \mathbb{Z}_+}^{\times} \otimes^n_{s,\mathrm{p}} X$ ми позначаємо *декартовий локально опуклий добуток* і $\sum\limits_{n \in \mathbb{Z}_+}^{\oplus} \otimes^n_{s,\mathrm{p}} X$ — *пряму локально опуклу суму* симетричних тензорних степенів $\otimes^n_{s,\mathrm{p}} X$ простору X; аналогічно для простору X'. Зауважимо, що елементи прямої суми містять лише скінченну кількість доданків.

Нехай простір X є ядерним (F) або (DF) локально опуклим простором (див. [8, 3]). Зауважимо, що у цьому випадку простори $\otimes^n_{s,\mathrm{p}} X'$ і $(\otimes^n_{s,\mathrm{p}} X)'$ — топологічно ізоморфні.

Наведемо ряд тверджень, доведених у роботі [12], які дають тензорну характеристику відповідних поліноміальних алгебр.

Твердження 1.1 ([12]). *Справджуються наступні лінійні топологічні ізоморфізми*

$$\otimes^n_{s,\mathrm{p}} X' \overset{\Upsilon_{X'}}{\simeq} \mathsf{P}_n(X), \quad \otimes^n_{s,\mathrm{p}} X \overset{\Upsilon_X}{\simeq} \mathsf{P}_n(X'), \quad \prod_{n \in \mathbb{Z}_+}^{\times} \otimes^n_{s,\mathrm{p}} X' \overset{\widetilde{\Upsilon}_{X'}}{\simeq} \mathsf{P}'(X'), \quad \sum_{n \in \mathbb{Z}_+}^{\oplus} \otimes^n_{s,\mathrm{p}} X \overset{\widetilde{\Upsilon}_X}{\simeq} \mathsf{P}(X').$$

Елементи простору $\prod^{\times}_{n \in \mathbb{Z}_+} \otimes^n_{s,\mathrm{p}} X'$ на довільний $x \in X$ діють за формулою

$$p(x) := \left\langle \prod_{n \in \mathbb{Z}_+}^{\times} p_n \;\middle|\; \sum_{n \in \mathbb{Z}_+}^{\oplus} \otimes^n x \right\rangle = \sum_{n \in \mathbb{Z}_+} P_n(x), \quad p = \prod^{\times} p_n, \tag{2}$$

де $P_n(x)$ визначається формулою (1). Зауважимо, що множина $\sum^{\oplus} \otimes^n x$ є тотальною підмножиною в $\sum^{\oplus} \otimes^n_{s,\mathrm{p}} X$.

Наслідок 1.1 ([12]). *Простори $\mathsf{P}'(X')$ і $\mathsf{P}(X')$ утворюють двоїстість $\langle \mathsf{P}'(X') \mid \mathsf{P}(X') \rangle$. Крім того, якщо X неперервно і щільно вкладається в X', то правильним є неперервне щільне вкладення $\mathsf{P}(X') \hookrightarrow \mathsf{P}'(X')$.*

Елементи простору $\mathsf{P}'(X')$ ми називатимемо *поліноміальними узагальненими функціями*. Їх можна розуміти як поліноми на просторі X в розумінні формули (2). Надалі, враховуючи ізоморфізм $\widetilde{\Upsilon}_{X'}$, поліноміальні узагальнені функції деколи будемо записувати у вигляді $(p_1, p_2, \ldots, p_n, \ldots)$, де $p_n \in \otimes^n_{s,\mathrm{p}} X'$.

Твердження 1.2 ([12]). *Пряма сума $\sum^{\oplus}_{n \in \mathbb{Z}_+} \otimes^n_{s,\mathrm{p}} X = \left\{ \varphi = \sum^{\oplus} \varphi_n \colon \varphi_n \in \otimes^n_{s,\mathrm{p}} X \right\}$ є локально опуклою алгеброю відносно згортки $\varphi \star \psi := \sum\limits_{n \in \mathbb{Z}_+}^{\oplus} \left(\sum\limits_{m=0}^{n} \varphi_m \otimes_s \psi_{n-m} \right)$, і відображення $\left\{ \sum^{\oplus} \otimes^n_{s,\mathrm{p}} X, \star \right\} \xrightarrow{\widetilde{\Upsilon}_X} \left\{ \mathsf{P}(X'), \cdot \right\}$ є ізоморфізмом алгебр.*

Наслідок 1.2 ([12]). *Множення алгебри $\mathsf{P}(X')$ може бути єдиним чином продовжене до множення в $\mathsf{P}'(X')$. Простір $\mathsf{P}'(X')$ є топологічною алгеброю відносно введеного множення і $\widetilde{\Upsilon}_X$ однозначно продовжується до алгебраїчного ізоморфізму $\left\{ \prod^{\times}_{n \in \mathbb{Z}_+} \otimes^n_{s,\mathrm{p}} X', \star \right\} \overset{\widetilde{\Upsilon}_{X'}}{\simeq} \left\{ \mathsf{P}'(X'), \cdot \right\}$.*

У просторі $\mathscr{L}\left[\sum^{\oplus}_{n \in \mathbb{Z}_+} \otimes^n_{s,\mathrm{p}} X\right]$ неперервних лінійних операторів з $\sum^{\oplus}_{n \in \mathbb{Z}_+} \otimes^n_{s,\mathrm{p}} X$ в себе розглянемо підалгебру $\mathscr{L}_\Gamma\left[\sum^{\oplus}_{n \in \mathbb{Z}_+} \otimes^n_{s,\mathrm{p}} X\right]$ операторів, які залишають простори $\otimes^n_{s,\mathrm{p}} X$ інваріантними, тобто

$$\mathscr{L}\left[\sum_{n \in \mathbb{Z}_+}^{\oplus} \otimes^n_{s,\mathrm{p}} X\right] \supset \mathscr{L}_\Gamma\left[\sum_{n \in \mathbb{Z}_+}^{\oplus} \otimes^n_{s,\mathrm{p}} X\right] := \begin{pmatrix} \mathscr{L}[\otimes^0_{s,\mathrm{p}} X] & 0 & \ldots & 0 & \ldots \\ 0 & \mathscr{L}[\otimes^1_{s,\mathrm{p}} X] & \ldots & 0 & \ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & \ldots & \mathscr{L}[\otimes^n_{s,\mathrm{p}} X] & \ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \end{pmatrix},$$

де, очевидно, $\otimes^0_{s,\mathrm{p}} X = \mathbb{C}$ і $\otimes^1_{s,\mathrm{p}} X = X$. Використовуючи ізоморфізм Υ_X, ми будемо асоціювати відповідні операторні алгебри, а саме $\mathscr{L}\left[\sum^{\oplus}_{n \in \mathbb{Z}_+} \otimes^n_{s,\mathrm{p}} X\right] \simeq \mathscr{L}\left[\mathsf{P}(X')\right]$ і $\mathscr{L}_\Gamma\left[\sum^{\oplus}_{n \in \mathbb{Z}_+} \otimes^n_{s,\mathrm{p}} X\right] \simeq \mathscr{L}_\Gamma\left[\mathsf{P}(X')\right]$.

2 Поліноміальне розширення повільно зростаючих узагальнених функцій

У роботах [11, 12] побудовано поліноміальне розширення ультрарозподілів з носіями на півосі $[0,+\infty)$ та в конусі $\mathbb{R}^d_+$ відповідно і розглянуто узагальнення перетворення Лапласа для поліноміальних ультрарозподілів.

Нехай $\mathcal{S} := \mathcal{S}(\mathbb{R})$, $\mathcal{S}' := \mathcal{S}'(\mathbb{R})$ позначають класичні простори Шварца швидко спадних функцій та повільно зростаючих узагальнених функцій відповідно. Відомо [1], що $\mathcal{S}$ є ядерним (F) простором, а $\mathcal{S}'$ — ядерним (DF) простором.

Розглянемо в $\mathcal{S}'$ підпростір $\mathcal{S}'_+$ тих розподілів, які тотожно рівні нульовому функціоналу на півосі $(-\infty, 0)$. Нехай $(\mathcal{S}'_+)^\circ$ — поляра підпростору $\mathcal{S}'_+$ відносно двоїстості $\langle \mathcal{S}', \mathcal{S}\rangle$. Тоді дуальним до $\mathcal{S}'_+$ буде факторпростір

$$\mathcal{S}_+ := \mathcal{S}/(\mathcal{S}'_+)^\circ = \left\{\boldsymbol{\varphi} = \varphi + \varphi_0 \colon \varphi \in \mathcal{S}, \varphi_0 \in (\mathcal{S}'_+)^\circ\right\}.$$

Нехай $\theta(x)$ позначає характеристичну функцію додатної півосі. Ядро оператора множення на функцію Хевісайда $\theta(x)$

$$\Theta\colon \mathcal{S} \ni \varphi \longmapsto \theta\varphi \in \mathcal{S}'_+$$

співпадає з $(\mathcal{S}'_+)^\circ$. Тому для його образу $\Theta[\mathcal{S}]$ правильним є топологічний ізоморфізм $\mathcal{S}_+ \simeq \Theta[\mathcal{S}]$. Таким чином, кожен елемент $\boldsymbol{\varphi} \in \mathcal{S}_+$ можна розуміти як регулярний розподіл з простору $\mathcal{S}'_+$.

З теорії ядерних просторів [2] випливає, що $\mathcal{S}'_+$ є ядерним (DF) простором, а $\mathcal{S}_+$ — ядерним (F) простором. Крім того, $\mathcal{S}'_+$ є згортковою алгеброю з одиницею $\delta(x)$, де $\delta(x)$ — дельта функція Дірака, а $\mathcal{S}_+$ є алгеброю відносно поточкового множення будь-яких представників відповідних класів суміжності.

Множина $(\mathcal{S}'_+)^\circ$ є ідеалом в алгебрі $\mathcal{S}$, інваріантним відносно лівосторонніх зсувів. Тому у факторпросторі $\mathcal{S}_+$ коректно визначено напівгрупу зсувів

$$T_t\colon \mathcal{S}_+ \ni \boldsymbol{\varphi}(x) \longmapsto \Theta\boldsymbol{\varphi}(x+t) \in \mathcal{S}_+, \qquad t \geq 0.$$

Ідеал $(\mathcal{S}'_+)^\circ$ є також інваріантним відносно оператора диференціювання D, тому коректно визначеним є оператор

$$D\colon \mathcal{S}_+ \ni \boldsymbol{\varphi} \longmapsto D(\boldsymbol{\varphi}) \in \mathcal{S}_+.$$

Нехай T'_t і D' — спряжені оператори до T_t і D відповідно відносно дуальної пари $\langle \mathcal{S}'_+, \mathcal{S}_+\rangle$. Зауважимо, що простір $\mathcal{S}_+$ неперервно і щільно вкладається у простір $\mathcal{S}'_+$ (це випливає з вкладення $\mathcal{S} \looparrowright \mathcal{S}'$). Отже, ми можемо розглянути простір поліномів $\mathsf{P}(\mathcal{S}'_+)$ і його спряжений $\mathsf{P}'(\mathcal{S}'_+)$, для яких згідно із наслідком 1.1 виконується неперервне щільне вкладення $\mathsf{P}(\mathcal{S}'_+) \looparrowright \mathsf{P}'(\mathcal{S}'_+)$. Крім того, $\langle \mathsf{P}'(\mathcal{S}'_+), \mathsf{P}(\mathcal{S}'_+)\rangle$ — дуальна пара.

Теорема 1. (i) *Однопараметрична сім'я* $\left\{\Gamma(T'_t)\right\}_{t\geq 0}$ *лінійних операторів, яка визначена на згортковій алгебрі* $\left\{\sum^{\oplus}_{n\in\mathbb{Z}_+} \otimes^n_{s,\mathrm{p}}\mathcal{S}_+, \star\right\}$ *рівністю*

$$\left[\widetilde{\Upsilon}_{\mathcal{S}_+}\Gamma(T'_t)\widetilde{\Upsilon}^{-1}_{\mathcal{S}_+}(Q)\right](f) = Q(T'_t f), \quad Q = \sum_{n\in\mathbb{Z}_+} Q_n \in \mathsf{P}(\mathcal{S}'_+), \quad f \in \mathcal{S}'_+,$$

де $Q_n = q_n \circ \otimes_n \circ \Delta_n \in \mathsf{P}_n(\mathcal{S}'_+)$, $q_n \in \otimes^n_{s,\mathrm{p}}\mathcal{S}_+$, *є одностайно неперервною* (C_0) *напівгрупою алгебраїчних автоморфізмів.*

Її генератор $\mathsf{d}\Gamma(D')$ *належить підалгебрі* $\mathscr{L}_\Gamma\left[\sum^{\oplus}_{n\in\mathbb{Z}_+} \otimes^n_{s,\mathrm{p}}\mathcal{S}_+\right]$ *і на довільний елемент* $q = \sum^{\oplus}_{n\in\mathbb{Z}_+} q_n \in \sum^{\oplus}_{n\in\mathbb{Z}_+} \otimes^n_{s,\mathrm{p}}\mathcal{S}_+$, *де* $q_n = \otimes^n\boldsymbol{\varphi} \in \otimes^n_{s,\mathrm{p}}\mathcal{S}_+$, $\boldsymbol{\varphi} \in \mathcal{S}_+$, *діє за правилом*

$$\mathsf{d}\Gamma(D')q = \sum^{\oplus}_{n\in\mathbb{Z}_+}\sum_{j=1}^{n} \underbrace{\boldsymbol{\varphi}\otimes\cdots\otimes\boldsymbol{\varphi}\otimes D(\boldsymbol{\varphi})}_{j} \otimes \underbrace{\boldsymbol{\varphi}\otimes\cdots\otimes\boldsymbol{\varphi}}_{n-j}.$$

(ii) *Однопараметрична сім'я* $\left\{\Gamma(T_t)\right\}_{t\geq 0}$ *лінійних операторів, яка визначена на згортковій алгебрі* $\left\{\prod^{\times}_{n\in\mathbb{Z}_+} \otimes^n_{s,\mathrm{p}}\mathcal{S}'_+, \star\right\}$ *рівністю*

$$\left[\widetilde{\Upsilon}_{\mathcal{S}'_+}\Gamma(T_t)\widetilde{\Upsilon}^{-1}_{\mathcal{S}'_+}(P)\right](\boldsymbol{\varphi}) = P(T_t\boldsymbol{\varphi}), \quad P = \prod^{\times}_{n\in\mathbb{Z}_+} P_n \in \mathsf{P}'(\mathcal{S}'_+). \quad \boldsymbol{\varphi} \in \mathcal{S}_+,$$

де $P_n = p_n \circ \otimes_n \circ \Delta_n \in \mathsf{P}_n(\mathcal{S}_+)$, $p_n \in \otimes^n_{s,\mathrm{p}}\mathcal{S}'_+$, *є одностайно неперервною* (C_0) *напівгрупою алгебраїчних автоморфізмів.*

Її генератор $\mathsf{d}\Gamma(D)$ *належить підалгебрі* $\mathscr{L}_\Gamma\left[\prod^{\times}_{n\in\mathbb{Z}_+} \otimes^n_{s,\mathrm{p}}\mathcal{S}'_+\right]$ *і на довільний елемент* $p = \prod^{\times}_{n\in\mathbb{Z}_+} p_n \in \prod^{\times}_{n\in\mathbb{Z}_+} \otimes^n_{s,\mathrm{p}}\mathcal{S}'_+$, *де* $p_n = \otimes^n f \in \otimes^n_{s,\mathrm{p}}\mathcal{S}'_+$, $f \in \mathcal{S}'_+$, *діє за правилом*

$$\mathsf{d}\Gamma(D)p = -\prod^{\times}_{n\in\mathbb{Z}_+}\sum_{j=1}^{n} \underbrace{f\otimes\cdots\otimes f\otimes D'(f)}_{j} \otimes \underbrace{f\otimes\cdots\otimes f}_{n-j}.$$

Доведення. Нехай $\mathcal{S}^n$ позначає поповнення простору $\mathcal{S}$ за нормою

$$\|\varphi\|_n = \sup_{x\in\mathbb{R},\ 0\leq\alpha\leq n} (1+x^2)^{n/2}|D^\alpha\varphi(x)|, \quad \varphi \in \mathcal{S}, \quad n \in \{0\}\cup\mathbb{N}.$$

Для кожного $n \in \{0\}\cup\mathbb{N}$ розглянемо факторпростір $\mathcal{S}^n_+ := \mathcal{S}^n/(\mathcal{S}'_+)^\circ$. Тоді простір $\mathcal{S}_+$ може бути зображений у вигляді проективної границі [1]

$$\mathcal{S}_+ = \lim_{n\to\infty} \mathrm{pr}\, \mathcal{S}^n_+,$$

причому кожне вкладення $\mathcal{S}^{n+1}_+ \subset \mathcal{S}^n_+$ $(n = 0, 1, 2, \dots)$ цілком неперервне. Використовуючи відому [6] властивість комутативності проективних границь із проективними тензорними добутками отримаємо

$$\otimes^n_{s,\mathrm{p}}\mathcal{S}_+ = \otimes^n_{s,\mathrm{p}} \lim_{n\to\infty} \mathrm{pr}\, \mathcal{S}^n_+ = \lim_{n\to\infty} \mathrm{pr} \otimes^n_{s,\mathrm{p}} \mathcal{S}^n_+. \tag{3}$$

Система функцій

$$q_n = \otimes^n\boldsymbol{\varphi} : (t_1, \dots, t_n) \longmapsto \boldsymbol{\varphi}(t_1) \otimes\cdots\otimes \boldsymbol{\varphi}(t_n), \tag{4}$$

де $\boldsymbol{\varphi} \in \mathcal{S}_+$, є тотальною підмножиною в $\otimes^n_{s,\mathrm{p}}\mathcal{S}_+$.

З твердження 1.1 випливають рівності

$$[\widetilde{\Upsilon}_{\mathcal{S}_+}\Gamma(T_t')\widetilde{\Upsilon}^{-1}_{\mathcal{S}_+}(Q)](f) = \sum_{n\in\mathbb{Z}_+}\left\langle \otimes^n (T_t'f) \mid q_n\right\rangle = \sum_{n\in\mathbb{Z}_+}\left\langle T_t'f\otimes\cdots\otimes T_t'f \mid \boldsymbol{\varphi}\otimes\cdots\otimes\boldsymbol{\varphi}\right\rangle =$$
$$\sum_{n\in\mathbb{Z}_+}\langle T_t'f \mid \boldsymbol{\varphi}\rangle^n = \sum_{n\in\mathbb{Z}_+}\langle f \mid T_t\boldsymbol{\varphi}\rangle^n = \sum_{n\in\mathbb{Z}_+}\left\langle \otimes^n f \mid \otimes^n(T_t\boldsymbol{\varphi})\right\rangle = \sum_{n\in\mathbb{Z}_+}\left\langle \otimes^n f \mid (\otimes^n T_t)(q_n)\right\rangle.$$

Для кожного n розглянемо напівгрупу $\otimes^n T_t$ на тотальній підмножині (4) в просторі $\otimes^n_{s,\mathrm{p}}\mathcal{S}_+$. Оскільки оператор T_t здійснює лінійну заміну змінних, то, очевидно, маємо

$$\|T_t\boldsymbol{\varphi}\|_n = \|\boldsymbol{\varphi}\|_n, \quad \forall n\in\{0\}\cup\mathbb{N}.$$

Звідси, а також із регулярності проективної границі (3), випливає одностайна неперервність напівгрупи $\otimes^n T_t$ в просторі $\otimes^n_{s,\mathrm{p}}\mathcal{S}_+$ для кожного $n = 0, 1, 2, \ldots$. Використовуючи (C_0) властивість напівгрупи T_t, легко довести цю ж властивість для напівгрупи $\otimes^n T_t$. Остаточно, одностайна неперервність та сильна неперервність напівгрупи $\Gamma(T_t')$ випливає із властивостей топології прямої суми.

Знайдемо генератор напівгрупи $\otimes^n T_t$. Для кожного фіксованого $q_n = \otimes^n\boldsymbol{\varphi}$ маємо

$$\frac{d}{dt}\left[(\otimes^n T_t)(q_n)\right]\Big|_{t=0} = \frac{d}{dt}\left[T_t\boldsymbol{\varphi}\otimes\cdots\otimes T_t\boldsymbol{\varphi}\right]\Big|_{t=0} =$$
$$\sum_{j=1}^{n}\underbrace{T_t\boldsymbol{\varphi}\otimes\cdots\otimes T_t\boldsymbol{\varphi}\otimes\frac{d}{dt}T_t\boldsymbol{\varphi}}_{j}\otimes\underbrace{T_t\boldsymbol{\varphi}\otimes\cdots\otimes T_t\boldsymbol{\varphi}}_{n-j}\Bigg|_{t=0} =$$
$$\sum_{j=1}^{n}\underbrace{\boldsymbol{\varphi}\otimes\cdots\otimes\boldsymbol{\varphi}\otimes D(\boldsymbol{\varphi})}_{j}\otimes\underbrace{\boldsymbol{\varphi}\otimes\cdots\otimes\boldsymbol{\varphi}}_{n-j}.$$

Операція диференціювання D є лінійною і неперервною в просторі $\mathcal{S}_+$ [1]. Тому оператор $\otimes^{j-1}I_+\otimes D\otimes^{n-j}I_+$, де I_+ позначає тотожній оператор в $\mathscr{L}[\mathcal{S}_+]$, належить простору $\mathscr{L}[\otimes^n_{s,\mathrm{p}}\mathcal{S}_+]$. Для завершення доведення пункту (i) залишилось використати те, що кожен елемент $q\in\sum^{\oplus}_{n\in\mathbb{Z}_+}\otimes^n_{s,\mathrm{p}}\mathcal{S}_+$ можна апроксимувати лінійною комбінацією елементів (4).

Використовуючи теорію двоїстості і дуальність $\left\langle\prod^{\times}_{n\in\mathbb{Z}_+}\otimes^n_{s,\mathrm{p}}\mathcal{S}'_+ \mid \sum^{\oplus}_{n\in\mathbb{Z}_+}\otimes^n_{s,\mathrm{p}}\mathcal{S}_+\right\rangle$, легко провести аналогічні міркування для доведення пункту (ii). □

Теорема 2. (i) *Генератор* $\mathsf{d}\Gamma(D')$ *є неперервним диференціюванням на згортковій алгебрі* $\sum^{\oplus}_{n\in\mathbb{Z}_+}\otimes^n_{s,\mathrm{p}}\mathcal{S}_+$, *тобто*

$$\mathsf{d}\Gamma(D')(p\star q) = [\mathsf{d}\Gamma(D')p]\star q + p\star[\mathsf{d}\Gamma(D')q] \tag{5}$$

для довільних $p, q\in\sum^{\oplus}_{n\in\mathbb{Z}_+}\otimes^n_{s,\mathrm{p}}\mathcal{S}_+$.

(ii) *Генератор* $\mathsf{d}\Gamma(D)$ *є неперервним диференціюванням на згортковій алгебрі* $\prod^{\times}_{n\in\mathbb{Z}_+}\otimes^n_{s,\mathrm{p}}\mathcal{S}'_+$, *тобто*

$$\mathsf{d}\Gamma(D)(p\star q) = [\mathsf{d}\Gamma(D)p]\star q + p\star[\mathsf{d}\Gamma(D)q] \tag{6}$$

для довільних $p, q\in\prod^{\times}_{n\in\mathbb{Z}_+}\otimes^n_{s,\mathrm{p}}\mathcal{S}'_+$.

(iii) *Генератори* $\mathsf{d}\Gamma(D)$ *і* $\mathsf{d}\Gamma(D')$ *задовольняють дуальне співвідношення*

$$\langle\mathsf{d}\Gamma(D)p \mid q\rangle = -\langle p \mid \mathsf{d}\Gamma(D')q\rangle, \quad \forall p\in\prod^{\times}_{n\in\mathbb{Z}_+}\otimes^n_{s,\mathrm{p}}\mathcal{S}'_+, \quad \forall q\in\sum^{\oplus}_{n\in\mathbb{Z}_+}\otimes^n_{s,\mathrm{p}}\mathcal{S}_+. \tag{7}$$

Доведення. (i) Нехай $p = \sum^{\oplus}_{n\in\mathbb{Z}_+}\otimes^n\boldsymbol{\varphi}\in\sum^{\oplus}_{n\in\mathbb{Z}_+}\otimes^n_{s,\mathrm{p}}\mathcal{S}_+$ і $q = \sum^{\oplus}_{n\in\mathbb{Z}_+}\otimes^n\boldsymbol{\psi}\in\sum^{\oplus}_{n\in\mathbb{Z}_+}\otimes^n_{s,\mathrm{p}}\mathcal{S}_+$, $\boldsymbol{\varphi},\boldsymbol{\psi}\in\mathcal{S}_+$. Тоді

$$p\star q = \left(\sum^{\oplus}_{n\in\mathbb{Z}_+}\otimes^n\boldsymbol{\varphi}\right)\star\left(\sum^{\oplus}_{n\in\mathbb{Z}_+}\otimes^n\boldsymbol{\psi}\right) = \sum^{\oplus}_{n\in\mathbb{Z}_+}\sum_{m=0}^{n}(\otimes^m\boldsymbol{\varphi})\otimes(\otimes^{n-m}\boldsymbol{\psi}).$$

Нехай ${}^n_jD$ позначає оператор, що на довільний елемент виду $\otimes^n\boldsymbol{\varphi}\in\otimes^n_{s,\mathrm{p}}\mathcal{S}_+$ діє за правилом

$${}^n_jD[\otimes^n\boldsymbol{\varphi}] := \underbrace{\boldsymbol{\varphi}\otimes\cdots\otimes\boldsymbol{\varphi}\otimes D(\boldsymbol{\varphi})}_{j}\otimes\underbrace{\boldsymbol{\varphi}\otimes\cdots\otimes\boldsymbol{\varphi}}_{n-j}.$$

Далі безпосередньо переконуємося у правильності рівності (5):

$$\mathsf{d}\Gamma(D')(p\star q) = \sum^{\oplus}_{n\in\mathbb{Z}_+}\sum_{m=0}^{n}\sum_{j=1}^{n}{}^n_jD[(\otimes^m\boldsymbol{\varphi})\otimes(\otimes^{n-m}\boldsymbol{\psi})] =$$
$$\sum^{\oplus}_{n\in\mathbb{Z}_+}\sum_{m=0}^{n}\left(\sum_{j=1}^{m}{}^m_jD[\otimes^m\boldsymbol{\varphi}]\otimes(\otimes^{n-m}\boldsymbol{\psi}) + \sum_{j=1}^{n-m}(\otimes^m\boldsymbol{\varphi})\otimes{}^{n-m}_{\;\;j}D[\otimes^{n-m}\boldsymbol{\psi}]\right) =$$
$$\sum^{\oplus}_{n\in\mathbb{Z}_+}\sum_{m=0}^{n}\left(\left(\sum_{j=1}^{m}{}^m_jD[\otimes^m\boldsymbol{\varphi}]\right)\otimes(\otimes^{n-m}\boldsymbol{\psi})\right) + \sum^{\oplus}_{n\in\mathbb{Z}_+}\sum_{m=0}^{n}\left((\otimes^m\boldsymbol{\varphi})\otimes\left(\sum_{j=1}^{n-m}{}^{n-m}_{\;\;j}D[\otimes^{n-m}\boldsymbol{\psi}]\right)\right) =$$
$$[\mathsf{d}\Gamma(D')p]\star q + p\star[\mathsf{d}\Gamma(D')q].$$

(ii) Доведення рівності (6) проводиться аналогічно.

(iii) Правильність співвідношення (7) відразу слідує із рівностей $D' = -D$ та

$$\left\langle\sum_{j=1}^{n}{}^n_jD'[p_n] \;\Big|\; q_n\right\rangle = \left\langle\sum_{j=1}^{n}{}^n_jD'[\otimes^n f] \;\Big|\; \otimes^n\boldsymbol{\varphi}\right\rangle =$$
$$-\left\langle\otimes^n f \;\Big|\; \sum_{j=1}^{n}{}^n_jD[\otimes^n\boldsymbol{\varphi}]\right\rangle = -\left\langle p_n \;\Big|\; \sum_{j=1}^{n}{}^n_jD[q_n]\right\rangle,$$

де $p_n = \otimes^n f\in\otimes^n_{s,\mathrm{p}}\mathcal{S}'_+$, $f\in\mathcal{S}'_+$, $q_n = \otimes^n\boldsymbol{\varphi}\in\otimes^n_{s,\mathrm{p}}\mathcal{S}_+$, $\boldsymbol{\varphi}\in\mathcal{S}_+$, а оператор ${}^n_jD'$ визначається за формулою ${}^n_jD'[\otimes^n f] := \underbrace{f\otimes\cdots\otimes f\otimes D'(f)}_{j}\otimes\underbrace{f\otimes\cdots\otimes f}_{n-j}$. □

Елементи простору $\mathcal{P}'(\mathcal{S}'_+)$ ми називатимемо *поліноміальними повільно зростаючими узагальненими функціями*.

3 Поліноміальне розширення перетворення Фур'є-Лапласа

Відомо з [1], що перетворення Фур'є $\widehat{\varphi}(\zeta) := [F\varphi(t)](\zeta)$ бієктивно і неперервно відображає простір $\mathcal{S}$ на простір $\mathcal{S}$. Побудуємо факторпростір

$$\widehat{\mathcal{S}}_+ := \mathcal{S}/F\left[(\mathcal{S}'_+)^{\circ}\right],$$

який, очевидно, буде образом при перетворенні Фур'є елементів з простору $\mathcal{S}_+$, тобто визначеним є відображення $F_+ \colon \mathcal{S}_+ \longmapsto \widehat{\mathcal{S}}_+$. Користуючись ін'єктивністю відображення F_+, простір $\widehat{\mathcal{S}}_+$ наділимо індукованою перетворенням F_+ топологією. Звідси випливає, що простір $\widehat{\mathcal{S}}_+$ є ядерним (F) простором. Нехай $F'_+ \colon \widehat{\mathcal{S}}'_+ \longmapsto \mathcal{S}'_+$ — спряжене до F_+ відображення, де $\widehat{\mathcal{S}}'_+$ — сильно спряжений до $\widehat{\mathcal{S}}_+$ простір. Перетворення $\mathcal{F}'_+ := 2\pi(F'_+)^{-1} \colon \mathcal{S}'_+ \ni f \longmapsto \widehat{f} \in \widehat{\mathcal{S}}'_+$ назвемо *узагальненим перетворенням Фур'є-Лапласа* узагальнених функцій з класу $\mathcal{S}'_+$.

Відображення $\mathcal{F}'_+$ є неперервним у сильній топології простору $\mathcal{S}'_+$, тому $\widehat{\mathcal{S}}'_+$ є ядерним (DF) простором. Крім того $\widehat{\mathcal{S}}'_+$ є мультиплікативною алгеброю з одиницею $\widehat{\delta}$ відносно множення

$$\widehat{(f * g)} = \widehat{f} \cdot \widehat{g}, \qquad f, g \in \mathcal{S}'_+.$$

Білінійна форма $\left\langle \mathcal{F}'_+ f \mid F_+\varphi \right\rangle = \left\langle F'_+\mathcal{F}'_+ f \mid \varphi \right\rangle = 2\pi \left\langle f \mid \varphi \right\rangle$, де $f \in \mathcal{S}'_+$, $\varphi \in \mathcal{S}_+$ визначає нову дуальність $\left\langle \widehat{\mathcal{S}'_+} \mid \widehat{\mathcal{S}_+} \right\rangle$.

Використовуючи твердження 1.1, ми можемо розширити узагальнене перетворення Фур'є-Лапласа на алгебру $\mathcal{P}'(\mathcal{S}'_+)$ наступним чином.

Комутативна діаграма

$$\begin{tikzcd}
\mathsf{P}'(\mathcal{S}'_+) \arrow[r, "\mathsf{F}'_+"] \arrow[d, equal, "\widetilde{\Upsilon}_{\mathcal{S}'_+}"'] & \mathsf{P}'(\widehat{\mathcal{S}}'_+) \arrow[d, equal, "\widetilde{\Upsilon}_{\widehat{\mathcal{S}}'_+}"'] \\
\prod\limits^{\times}_{n\in\mathbb{Z}_+} \otimes^n_{s,\mathbf{p}} \mathcal{S}'_+ \arrow[r, "\times(\otimes^n \mathcal{F}'_+)"] & \prod\limits^{\times}_{n\in\mathbb{Z}_+} \otimes^n_{s,\mathbf{p}} \widehat{\mathcal{S}}'_+
\end{tikzcd}$$

однозначно визначає поліноміальне розширення

$$\mathsf{F}'_+ \colon \mathsf{P}'(\mathcal{S}'_+) \ni P = \prod^{\times}_{n\in\mathbb{Z}_+} P_n \longmapsto \widehat{P} := \prod^{\times}_{n\in\mathbb{Z}_+} \mathsf{F}'_n(P_n) \in \mathsf{P}'(\widehat{\mathcal{S}}'_+), \qquad P_n \in \mathsf{P}_n(\mathcal{S}_+)$$

узагальненого перетворення Фур'є-Лапласа $\mathcal{F}'_+$, де F'_n – однорідний випадок відображення F'_+, тобто перетворення, що однозначно визначається комутативною діаграмою

$$\begin{tikzcd}
\mathsf{P}_n(\mathcal{S}_+) \arrow[r, "\mathsf{F}'_n"] \arrow[d, equal, "\Upsilon_{\mathcal{S}'_+}"'] & \mathsf{P}_n(\widehat{\mathcal{S}}_+) \arrow[d, equal, "\Upsilon_{\widehat{\mathcal{S}}'_+}"'] \\
\otimes^n_{s,\mathbf{p}} \mathcal{S}'_+ \arrow[r, "\otimes^n \mathcal{F}'_+"] & \otimes^n_{s,\mathbf{p}} \widehat{\mathcal{S}}'_+ .
\end{tikzcd}$$

Відображення F'_+ ми назвемо *поліноміальним перетворенням Фур'є-Лапласа.* Слід зауважити, що це відображення належить діагональній підалгебрі $\mathscr{L}_\Gamma\left[\mathsf{P}'(\mathcal{S}'_+), \mathsf{P}'(\widehat{\mathcal{S}}'_+)\right]$.

Більше того, перетворення F'_+ діє як сюр'єктивний топологічний ізоморфізм з $\mathsf{P}'(\mathcal{S}'_+)$ на $\mathsf{P}'(\widehat{\mathcal{S}}'_+)$.

З наслідку 1.1 випливає, що звуження

$$\mathsf{F}_+ := \mathsf{F}'_+ \mid_{\mathsf{P}(\mathcal{S}'_+)}$$

на щільну підалгебру $\mathsf{P}(\mathcal{S}'_+) \subset \mathsf{P}'(\mathcal{S}'_+)$ діє як алгебраїчний ізоморфізм

$$\mathsf{F}_+ \colon \mathsf{P}(\mathcal{S}'_+) \ni Q = \sum_{n\in\mathbb{Z}_+} Q_n \longrightarrow \widehat{Q} := \sum_{n\in\mathbb{Z}_+} \mathsf{F}_n(Q_n) \in \mathsf{P}(\widehat{\mathcal{S}}'_+), \qquad Q_n \in \mathsf{P}_n(\mathcal{S}'_+),$$

де $\mathsf{F}_n := \mathsf{F}'_n \mid_{\mathsf{P}_n(\mathcal{S}'_+)}$. Крім того, правильною є дуальна рівність $\left\langle \widehat{P} \mid \widehat{Q} \right\rangle = \left\langle P \mid Q \right\rangle$.

Приклад 3.1. *Знайдемо узагальнене перетворення Фур'є-Лапласа дельта-функції Дірака*

$$\left\langle \mathcal{F}'_+\delta \mid F_+\varphi \right\rangle = 2\pi \left\langle \delta \mid \varphi \right\rangle = 2\pi\varphi(0) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{it\xi}\,\widehat{\varphi}(\xi)\,d\xi \,\Big|_{t=0} = \int_{-\infty}^{+\infty} \widehat{\varphi}(\xi)\,d\xi = \left\langle 1 \mid F_+\varphi \right\rangle.$$

Таким чином, $\mathcal{F}'_+\delta = 1$.

Розглянемо елемент δ_p з простору $\prod^{\times}_{n\in\mathbb{Z}_+} \otimes^n_{s,\mathbf{p}} \mathcal{S}'_+$ *виду*

$$\delta_p = (\delta, \delta\otimes\delta, \ldots, \otimes^n\delta, \ldots).$$

Зауважимо, що кожен $\otimes^n\delta \in \otimes^n_{s,\mathbf{p}}\mathcal{S}'_+$ можна розуміти як n-однорідний поліном з простору $\mathsf{P}_n(\mathcal{S}'_+)$ в сенсі формули (1).

Обчислимо поліноміальне перетворення Фур'є-Лапласа елемента δ_p. Для довільного $n \in \mathbb{N}$ маємо

$$\otimes^n \mathcal{F}'_+ \left[\otimes^n \delta\right] = 1 \otimes \cdots \otimes 1 = \otimes^n 1.$$

Тому остаточно отримаємо $\mathsf{F}'_+[\delta_p] = (1, 1\otimes 1, \ldots, \otimes^n 1, \ldots)$.

Приклад 3.2. *Нехай $\theta(x)$ – функція Хевісайда. Знайдемо її узагальнене перетворення Фур'є-Лапласа.*

$$\left\langle \mathcal{F}'_+\theta \mid F_+\varphi \right\rangle = 2\pi \left\langle \theta \mid \varphi \right\rangle = 2\pi \int_0^{\infty} \varphi(t)\,dt =$$

$$2\pi \int_0^{+\infty} e^{-it\xi}\,\varphi(t)\,dt \,\Big|_{\xi=0} = 2\pi\widehat{\varphi}(0) = 2\pi \left\langle \delta \mid F_+\varphi \right\rangle.$$

Отримали $\mathcal{F}'_+\theta = 2\pi\delta$. Знайдемо поліноміальне перетворення Фур'є-Лапласа елемента $\theta_p = (\frac{1}{2\pi}\theta, \frac{1}{2\pi}\theta \otimes \frac{1}{2\pi}\theta, \ldots, \otimes^n \frac{1}{2\pi}\theta, \ldots)$. Для довільного $n \in \mathbb{N}$ маємо

$$\otimes^n \mathcal{F}'_+ \left[\otimes^n \frac{1}{2\pi}\theta\right] = \delta \otimes \cdots \otimes \delta = \otimes^n \delta.$$

Отже, $\mathsf{F}'_+[\theta_p] = \delta_p$.

ЛІТЕРАТУРА

1. Владимиров В.С. Обобщенные функции в математической физике. –М.: Наука, 1979. –318 с.
2. Пич А. Ядерные локально выпуклые пространства. –М.: Мир, 1967. –266 с.
3. Шефер Х. Топологические векторные пространства. –М.: Мир, 1971. –360 с.
4. Borchers H. *Algebras of unbounded operators in quantum fields theory*, Physica, **124A** (1988), 1–127.
5. Dineen S. Complex Analysis on Infinite Dimensional Spaces, Springer-Verlag, Berlin-Göttingen-Heidelberg, 1999.
6. Grothendieck A. *Produits tensoriels topologues et espases nucléaire*, Mem. Amer. Math. Soc., **16**, 11 (1955), 1–140.
7. Hida T., Kuo H.H., Potthoff J., Streit L. White Noise: An Infinite Dimensional Calculus, Kluwer Academic Publishers, 1993.
8. Jarchow H. Locally Convex Spaces, Teubner, Stuttgart, 1981.
9. Kondratiev Y.G., Streit L., Westerkamp W., Yan J. *Generalized functions in infinite dimensional analysis*, Hiroshima Math. J. **28** (1998), 213–260.
10. Obata N. White Noise Calculus and Fock Space, Springer, 1995.
11. Lopushansky O.V. *Polynomial ultradistributions: differentiation and Laplace transformation*, Banach Center Publ., **88** (2010), 195–209.
12. Lopushansky O.V., Sharyn S.V. *Polynomial ultradistributions on cone* $\mathbb{R}^d_+$, Topology, **48**, 2–4 (2009), 80–90.

Прикарпатський національний університет ім. В. Стефаника,
Івано-Франківськ, Україна

Надійшло 5.11.2010

Sharyn S.V. *Polynomial tempered distributions*, Carpathian Mathematical Publications, **2**, 2 (2010), 123–132.

In the article polynomial (nonlinear) analogue of tempered Schwartz distributions is constructed. Generalized operation of differentiation in the space of polynomial generalized functions as well as Fourier-Laplace transformation of such distributions are considered. Some examples are given.

Шарин С.В. *Полиномиальные медленно растущие распределения* // Карпатские математические публикации. — 2010. — Т.2, №2. — С. 123–132.

В работе построено полиномиальный (нелинейный) аналог медленно растущих распределений Шварца. Рассмотрено обобщенную операцию дифференцирования в пространстве полиномиальных обобщенных функций, а также преобразование Фурье-Лапласа таких распределений. Приведены примеры.

Науковий журнал

Карпатські Математичні Публікації

(свідоцтво про державну реєстрацію КВ № 14703-3674Р)

Том 2, №2
2010

Відповідальний за випуск — д.ф.-м.н. Загороднюк А.В.
Літературна редакція — Лабачук О.В.
Комп'ютерна правка та макетування — Кравців В.В.

Підписано до друку 27.12.2010 р. Формат 60×84/8.
Папір офсетний. Друк цифровий. Гарнітура Computer Modern
Умовн. друк. аркушів 16,5. Наклад 300 примірників. Замовлення 52

Друк: пп Голіней О.М.
м. Івано-Франківськ, вул. Галицька, 128
тел. 0342 58 04 32